

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ ASTRONOMIJE 2022. GODINE

3. RAZRED

RJEŠENJA

U svakom od sljedećih zadataka jedan je odgovor točan. Zaokruži jedan točan odgovor.

2	
---	--

1. Da Zemlja rotira dokazuje:

- a) retrogradno gibanje planeta,
- b) pojava da se na obzoru najprije pojavljuju jarbol broda koji se približava opažaču,
- c) Foucaultovo njihalo,
- d) gibanje Sunca preko nebeskog svoda.

Točan odgovor; c) Foucaultovo njihalo

Napomena: Gibanje Sunca preko nebeskog svoda NIJE dokaz Zemljine rotacije.

2	
---	--

2. Glavni razlog zašto teleskope postavljamo u stazu oko Zemlje je:

- a) da budu bliže zvijezdama,
- b) što možemo opažati i u dijelovima spektra koje apsorbira atmosfera,
- c) da snimamo lijepe fotografije,
- d) što se zrcala manje deformiraju zbog vlastite težine pod utjecajem sile teže.

Točan odgovor; b) što možemo opažati i u dijelovima spektra koje apsorbira atmosfera

2	
---	--

3. Jedan mjesec prije proljetne ravnodnevce Sunce će za opažača na sjevernoj polarnici:

- a) zaći točno na zapadu,
- b) zaći malo sjevernije od smjera zapada,
- c) zaći malo južnije od smjera zapada,
- d) neće uopće zaći jer je stalno ispod obzora.

Točan odgovor; c) zaći malo južnije od smjera zapada

2	
---	--

4. Donji planet bit će prividno najveći kada je u položaju:

- a) donje konjunkcije,
- b) gornje konjunkcije,
- c) maksimalne elongacije (otklona od Sunca),
- d) opozicije.

Točan odgovor; a) donje konjunkcije

2	
---	--

5. Proučavajući spektar galaktike iz lokalnog jata u kojemu su proširene linije možemo odrediti:

- a) njezinu masu.
- b) njezinu veličinu.
- c) njezinu udaljenost.
- d) profil brzine njezine rotacije.

Točan odgovor; d) profil brzine njezine rotacije.

Nadopuni ili odgovori:

2	
---	--

6. Koje je veličine potrebno poznavati da bi mogli transformirati koordinate nebeskog tijela iz horizontskog u nebeski ekvatorski sustav?

_____.

Točan odgovor; (mjesno) zvjezdano vrijeme i geografsku širinu (po 1 bod)
--

2	
---	--

7. Kako nazivamo točku na nebeskoj sferi koja se nalazi u smjeru suprotnom od smjera gibanja Sunčeva sustava?

_____.

Točan odgovor; Antiaps

2	
---	--

8. Sunčevu, kao i rotaciju plinovitih planeta zbog različitih profila brzina nazivamo _____. Brzina rotacije je na polovima _____ u odnosu na brzinu rotacije na ekvatoru.

Točan odgovor; diferencijalna, manja (sporija) (po 1 bod)

2	
---	--

9. Koja veličina povezuje prividne zvjezdane veličine mjerene u ukupnom spektru neke zvijezde s onom u vidljivom dijelu spektra?

_____.

Točan odgovor; Bolometrijska korekcija
--

2	
---	--

10. Kada iz Oortova oblaka u unutarnji dio Sunčeva sustava dođe neko nebesko tijelo, možemo očekivati da će se u novinskim natpisima koji opisuju to tijelo naći i neke apokaliptične riječi. O kojem se nebeskom tijelu najvjerojatnije radi?

_____.

Točan odgovor; O kometu (zvijezdi repatici)

Zadaci

11	
----	--

1. Inklinacija Europine staze u odnosu na Jupiterov ekvator je $0,47^\circ$. Pod pretpostavkom da su staze Europe i Jupitera kružnice odredite je li moguće da prilikom neke od revolucija oko Jupitera ne dođe do ulaska Europe u Jupiterovu sjenu? Potkrijepite odgovor odgovarajućim izračunom. Polumjeri Sunca, Jupitera i Europe su redom $r_S = 695700$ km, $r_{J,\text{pol}} = 66854$ km, $r_E = 1561$ km. Srednji polumjer staze Jupitera oko Sunca iznosi 5,2 AJ, a Europe od Jupitera 670900 km. Inklinacija Jupiterova ekvatora u odnosu na Jupiterovu stazu oko Sunca iznosi $3,13^\circ$. (1 AJ = $149,6 \cdot 10^6$ km)
- Napomena: za potrebe izračuna pretpostavite da je Jupiter kugla čiji je polumjer jednak polarnom koji je dan u tekstu ovog zadatka.

Nagib konusa sjene:

$$\alpha_{\text{sjene}} = \arcsin \frac{r_S - r_{J,\text{pol}}}{d_{JS}} \approx \arctg \frac{r_S - r_{J,\text{pol}}}{d_{JS}} \approx \frac{r_S - r_{J,\text{pol}}}{d_{JS}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\alpha_{\text{sjene}} = \arcsin \frac{695700 \text{ km} - 66854 \text{ km}}{5,2 \text{ AJ} \cdot 149,6 \cdot 10^6 \frac{\text{km}}{\text{AJ}}} = 0,0463^\circ \quad 1 \text{ bod}$$

Inklinacija staze Europe u odnosu na Jupiterovu stazu:

$$i_{E-J} = i_{E-J,\text{ekv}} + i_{J,\text{ekv}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$i_{E-J} = 0,47^\circ + 3,13^\circ = 3,6^\circ \quad 1 \text{ bod}$$

Duljina projekcije udaljenosti Europa-Jupiter u ravnini Jupiterova kruženja oko Sunca:

$$l_{\text{Europa}} = d_{E-J} \cos(i_{E-J}) \quad 1 \text{ bod}$$

$$l_{\text{Europa}} = 670900 \text{ km} \cdot \cos(3,6^\circ) = 669576 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

Udaljenost ruba sjene od pravca Jupiter-Sunce:

$$r_{\text{sjene}} = r_{J,\text{pol}} - l_{\text{Europa}} \cdot \tg \alpha_{\text{sjene}} \approx r_{J,\text{pol}} - l_{\text{Europa}} \cdot \sin \alpha_{\text{sjene}} \approx r_{J,\text{pol}} - l_{\text{Europa}} \cdot \frac{r_S - r_{J,\text{pol}}}{d_{JS}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_{\text{sjene}} = 66854 \text{ km} - 669576 \text{ km} \cdot \tg(0,0463^\circ) = 66313 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

Udaljenost središta Europe od središta sjene:

$$d_{\text{sjena-Europa}} = d_{E-J} \sin(i_{E-J}) \quad 1 \text{ bod}$$

$$d_{\text{sjena-Europa}} = 670900 \text{ km} \cdot \sin(3,6^\circ) = 42126 \text{ km} \quad 1 \text{ bod}$$

Europa prilikom svake revolucije oko Jupitera ulazi u Jupiterovu sjenu 1 bod

Napomena: ako se računa da sjena nije konusna, a napisano je da se zbog velikih udaljenosti ona može aproksimirati cilindrom/valjkom promjera jednakog polarnom promjeru Jupitera onda priznati (ako već nisu) 2 boda (za α_{sjene}) + 2 boda (za r_{sjene}).

Napomena: priznaju se i alternativni postupci rješavanja; priznaju se i izračuni aproksimacijama trigonometrijskih funkcija za male kutove

2. Kolika je maksimalna brzina kruženja (u km/s) Merkura oko Sunca, ako je poznato da velika poluos njegove staze, ekscentriciteta 0,2056, iznosi $57,9 \cdot 10^6$ km. Zanimarite relativističke efekte. ($G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $M_{\text{Sunca}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$)

Rješenje preko zakona očuvanja energije

$$E_{\text{sr}} = E_{\text{per}} \Rightarrow E_{\text{k,sr}} + E_{\text{p,sr}} = E_{\text{k,per}} + E_{\text{p,per}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_{\text{per}} = a(1-e) \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{m_{\text{M}} v_{\text{sr}}^2}{2} - \frac{m_{\text{M}} G M_{\text{S}}}{a} = \frac{m_{\text{M}} v_{\text{per}}^2}{2} - \frac{G M_{\text{S}} m_{\text{M}}}{a(1-e)} \Rightarrow$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{\frac{\frac{v_{\text{sr}}^2}{2} - \frac{G M_{\text{S}}}{a} + \frac{G M_{\text{S}}}{a(1-e)}}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{v_{\text{sr}}^2 + \frac{2 G M_{\text{S}} e}{a(1-e)}} \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\text{S}} + m_{\text{M}})} \approx \frac{4\pi^2}{G M_{\text{S}}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G M_{\text{S}}}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(57,9 \cdot 10^9 \text{ m})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}} = 7,598 \cdot 10^6 \text{ s} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\text{sr}} = \omega \cdot a = \frac{2\pi}{T} \cdot a \quad 0,5 \text{ bodova}$$

$$v_{\text{sr}} = 57,9 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \frac{2\pi}{7,598 \cdot 10^6 \text{ s}} = 47,88 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 0,5 \text{ bodova}$$

Alternativno:

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{G(M_{\text{S}} + m_{\text{M}})}{a}} \approx \sqrt{\frac{G M_{\text{S}}}{a}} \quad 2 \text{ boda}$$

$$v_{\text{sr}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{57,9 \cdot 10^9 \text{ m}}} = 47,88 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{\left(47,88 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \cdot 0,2056}{57,9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot (1-0,2056)}} = 58,98 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenje preko zakona očuvanja energije i zakona očuvanja količine gibanja

$$E_{\text{af}} = E_{\text{per}} \Rightarrow E_{\text{k,af}} + E_{\text{p,af}} = E_{\text{k,per}} + E_{\text{p,per}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_{\text{per}} = a(1-e) \quad 1 \text{ bod}$$

$$r_{\text{af}} = a(1+e) \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{m_{\text{M}} v_{\text{af}}^2}{2} - \frac{GM_{\text{S}} m_{\text{M}}}{a(1+e)} = \frac{m_{\text{M}} v_{\text{per}}^2}{2} - \frac{GM_{\text{S}} m_{\text{M}}}{a(1-e)} \Rightarrow \frac{v_{\text{af}}^2}{2} - \frac{GM_{\text{S}}}{a(1+e)} = \frac{v_{\text{per}}^2}{2} - \frac{GM_{\text{S}}}{a(1-e)} \quad 1 \text{ bod}$$

$$m_{\text{M}} r_{\text{af}} v_{\text{af}} = m_{\text{M}} r_{\text{per}} v_{\text{per}} \Rightarrow v_{\text{af}} = \frac{r_{\text{per}}}{r_{\text{af}}} v_{\text{per}} = \frac{a(1-e)}{a(1+e)} v_{\text{per}} = \frac{1-e}{1+e} v_{\text{per}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\left[\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] v_{\text{per}}^2 = \frac{GM_{\text{S}}}{a(1+e)} - \frac{GM_{\text{S}}}{a(1-e)} = \frac{GM_{\text{S}}}{a} \cdot \frac{-2e}{(1+e)(1-e)}$$

$$\left[\left(\frac{1-e}{1+e} \right)^2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{(1-e)^2 - (1+e)^2}{2(1+e)^2} = \frac{1-2e+e^2-1-2e-e^2}{2(1+e)^2} = \frac{-2e}{(1+e)^2}$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{\frac{GM_{\text{S}}(1+e)}{a(1-e)}} \quad 2 \text{ boda}$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} (1+0,2056)}{57,9 \cdot 10^9 \text{ m} (1-0,2056)}} = 58,98 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

Rješenje preko ukupne energije

$$E_{\text{k}} + E_{\text{p}} = E_{\text{uk}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{m_{\text{M}} v^2}{2} - \frac{GM_{\text{S}} m_{\text{M}}}{r} = - \frac{GM_{\text{S}} m_{\text{M}}}{2a} \quad 2 \text{ boda}$$

$$v^2 = GM_{\text{S}} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \text{ (tzv. vis-viva jednačba)} \quad 2 \text{ boda}$$

$$r_{\text{per}} = a(1-e) \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{GM_{\text{S}} \left(\frac{2}{a(1-e)} - \frac{1}{a} \right)} = \sqrt{\frac{GM_{\text{S}}(1+e)}{a(1-e)}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\text{per}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} (1+0,2056)}{57,9 \cdot 10^9 \text{ m} (1-0,2056)}} = 58,98 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: učenik može znati tzv. vis-viva jednačbu i ne treba ju izvoditi stoga se mogu priznati svi bodovi do ovog koraka (5 bodova)

Napomena: priznaju se i drugi alternativni postupci rješavanja

3. U dalekoj budućnosti lansirana je letjelica kojoj je cilj da u roku od 200 godina stigne do Sirijusa udaljenog od nas 8,71 g.s. Radio frekvencija za komunikaciju na koju je ugođen prijamnik na letjelici je 2115,3055 MHz, dok predajnik emitira na frekvenciji 2113,8125 MHz. Na kojoj frekvenciji ćemo primati podatke, a na kojoj ih trebamo slati da bi imali uspješnu komunikaciju sa Zemlje? Zanimarite brzinu gibanja Zemlje i uzmite da je brzina letjelice tijekom putovanja konstantna.

$$v_{\text{letjelice}} = \frac{d_{\text{Zemlja-Sirijus}}}{t} \quad 1 \text{ bod}$$

$$v_{\text{letjelice}} = \frac{8,71 \text{ g.s.} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{200 \text{ god.}} = 1,3065 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$z = \frac{v_{\text{letjelice}}}{c} = \frac{f_{\text{emitiranja, letjelica}} - f_{\text{primanja, Z}}}{f_{\text{primanja, Z}}}$$

$$f_{\text{primanja, Z}} = \frac{c}{c + v_{\text{letjelice}}} \cdot f_{\text{emitiranja, letjelica}} \quad 1 \text{ bod}$$

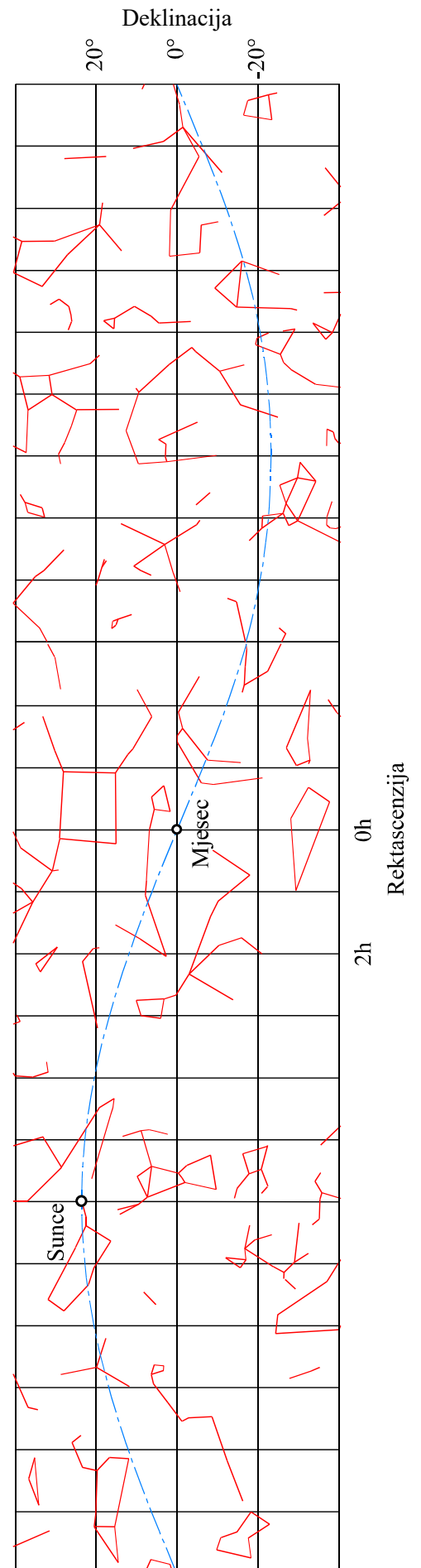
$$f_{\text{primanja, Z}} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1,3065 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 2113,8125 \text{ MHz} = 2025,5977 \text{ MHz} \quad 1 \text{ bod}$$

$$f_{\text{primanja, letjelica}} = \frac{c}{c + v_{\text{letjelice}}} \cdot f_{\text{emitiranja, Z}} \Rightarrow f_{\text{emitiranja, Z}} = \frac{c + v_{\text{letjelice}}}{c} \cdot f_{\text{primanja, letjelica}} \quad 1 \text{ bod}$$

$$f_{\text{emitiranja, Z}} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1,3065 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \cdot 2115,3055 \text{ MHz} = 2207,4271 \text{ Mhz} \quad 1 \text{ bod}$$

Priznaju se i alternativni načini rješavanja. Zbog brzine letjelice koja je <10% brzine svjetlosti zanemaren je relativistički efekt. Također priznati zadatak ako se ovaj efekt uzme u obzir. Priznaju se i rješenja koja se malo razlikuju od prikazanih (unutar granica od $\pm 1\%$) ako su posljedica zaokruživanja u međurezultatima.

4. Na priloženoj skici prikazana je Mercatorova projekcija nebeske sfere gledane sa Zemlje i to u granicama rektascenzije 0^h do 24^h , te deklinacije između -40° i 40° .
- Ucrtajte ekliptiku.
 - Označite 2h rektascenzije.
 - Označite položaj Sunca dana 21. lipnja.
 - Označite položaj Mjeseca tog datuma, a koji tada prolazi čvorom svoje staze i u fazi je zadnje četvrti.



- | | |
|---|--------|
| a) točno ucrtana ekliptika
sinusoida koja prolazi kroz točke ($0^h, 0^\circ$), ($6^h, +23,5^\circ$), ($12^h, 0^\circ$) i ($18^h, -23,5^\circ$) | 1 bod |
| b) točno označeno 2^h rektascenzije | 1 bod |
| c) točno označen položaj Sunca ($6^h, +23,5^\circ$) | 1 bod |
| d) točno označen položaj Mjeseca ($0^h, 0^\circ$)
(posljednja četvrt $\rightarrow 18^h$ ispred Sunca odnosno 6^h iza Sunca)
(prolazak čvorom \rightarrow Mjesec na ekliptici) | 2 boda |