

# Državno natjecanje iz fizike, 2021.

## Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

### Zadatak 1 (14 bodova)

Promatramo zvuk ispred i iza izvora. Ispred izvora, frekvencija zvuka je povišena za: **(1 bod)**

$$f_I = f_0 \frac{c}{c - v}$$

gdje je  $v$  brzina izvora, a  $c$  brzina zvuka u zraku. Iza izvora, frekvencija je snižena za: **(1 bod)**

$$f_{II} = f_0 \frac{c}{c + v}$$

Odbijanjem od zid, efektivno sada izvor postaje opažač, a zid novi "izvor". Stoga je val koji dolazi u susret izvoru-opažaču: **(4 boda)**

$$f_f = f_I \frac{c + v}{c}$$

a val koji stiže izvor:

$$f_r = f_{II} \frac{c - v}{c}$$

Uvrštavanjem, pišemo:

$$\frac{f_f}{f_r} = \left( \frac{c + v}{c - v} \right)^2 = \frac{6}{5}$$

Zadnju jednakost smo uvrstili iz uvjeta zadatka. Rješavanjem dobijemo kvadratnu jednadžbu po  $v$ : **(2 boda)**

$$v^2 - 22cv + c^2 = 0$$

Dva su moguća rješenja jednadžbe: **(2 boda)**

$$v_{1,2} = 11c \pm 11c \sqrt{\frac{120}{121}}$$

No, rješenje s  $+$  nije fizikalno jer predstavlja brzinu veću od zvuka. U tom slučaju zvuk  $f_I$  ne bi bio ispred izvora, pa ne bi bilo ni  $f_f$  odbijenog zvuka, kao što ni zvuk  $f_r$  ne bi mogao stići izvor. Prema tome, jedino rješenje je: **(2 boda)**

$$v = 11c \left( 1 - \sqrt{\frac{120}{121}} \right)$$

Uvrštavanjem vrijednosti dobijemo izraz za brzinu:  $v = 15.03 \text{ m/s}$ . **(2 boda)**

## Zadatak 2 (20 bodova)

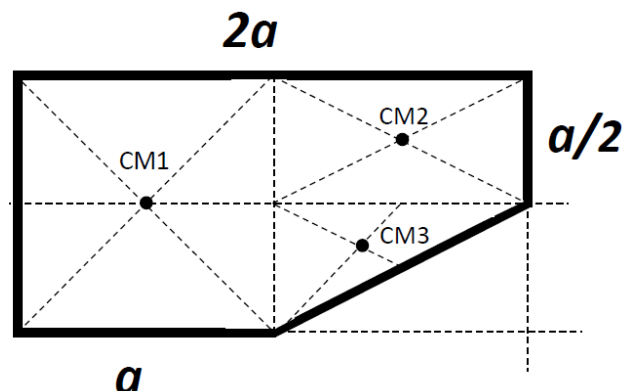
Da bismo odredili da li je tijelo stabilno, moramo naći položaj centra mase. **(1 bod)**

Za ovakvo nepravilno tijelo ukupni centar mase možemo izračunati uzimajući pravilne dijelove tijela kao točkaste mase na položaju njihovih centara masa. **(2 boda)**

Na slici je tijelo ABCDE podijeljeno na tri pravilna tijela te su označeni njihovi centri masa s koordinatama CM1 ( $x_1, y_1$ ), CM2 ( $x_2, y_2$ ), CM3 ( $x_3, y_3$ ). Ukupni položaj centra mase je tada: **(1 bod)**

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}; \quad y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

S obzirom da je tijelo homogeno, mase dijelova su proporcionalne površini tijela, za dio  $x$



vrijedi:  $m_x = \sigma S_x$ , gdje je  $\sigma$  površinska gustoća tijela a  $S_x$  površina dijela  $x$ . Lako nađemo mase svih djelova: **(2 boda)**

$$m_1 = \sigma a^2; \quad m_2 = \sigma \frac{a^2}{2}; \quad m_3 = \sigma \frac{a^2}{4}$$

Uvrštavajući, sada izraz za centar mase postaje: **(2 boda)**

$$x_{cm} = \frac{4}{7}x_1 + \frac{2}{7}x_2 + \frac{1}{7}x_3; \quad y_{cm} = \frac{4}{7}y_1 + \frac{2}{7}y_2 + \frac{1}{7}y_3$$

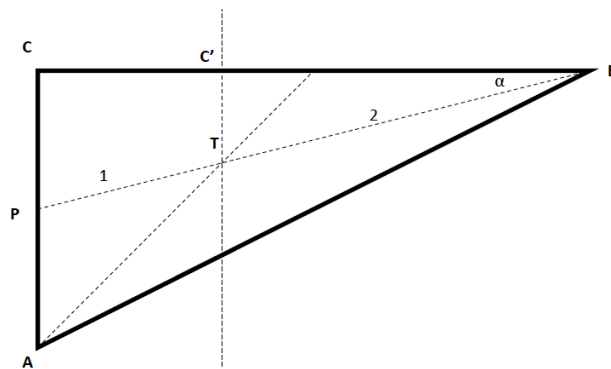
Radi lakšeg snalaženja, postaviti ćemo ishodište koordinatnog sustava u točku A. Dužina AB će biti duž smjera osi  $x$ , a dužina AE duž smjera osi  $y$ . Trivijalno je tada naći koordinate CM1 i CM2: **(2 boda)**

$$x_1 = \frac{a}{2}; \quad y_1 = \frac{a}{2}; \quad x_2 = \frac{3a}{2}; \quad y_2 = \frac{3a}{4}$$

Za CM3 promotrimo trokut ABC na slici. Centar mase trokuta nalazi se u težištu T, koje se nalazi u sjecištu težišnica trokuta. **(1 bod)**

Važno je spomenuti da težište dijeli svaku težišnicu na dva dijela, omjera duljina 2:1 (kao što je naznačeno za težišnicu iz vrha B). **(1 bod)**

Koristeći taj podatak, promotrimo trokute PBC i TBC' na slici. Radi se o sličnim trokutima (isti kut u vrhu B i dvije paralelne stranice). Za slične trokute vrijedi da omjeri duljina jedne stranice odgovaraju omjerima drugih stranica. Na taj način, možemo vidjeti da je omjer  $|PB| : |A'B| = 3:2$ .



Taj isti omjer stoga vrijedi i za  $|PC|:|TC'|$  te  $|BC|:|BC'|$ . Vrijedi:

$$|TC'| = \frac{2}{3}|PC| = \frac{2}{3} \frac{a}{4} = \frac{a}{6} \Rightarrow y_3 = \frac{a}{2} - \frac{a}{6} = \frac{a}{3}$$

te, slično,

$$x_3 = \frac{4a}{3}$$

Stoga su koordinate CM:

**(3 boda)**

$$x_{cm} = \frac{19}{21}a; \quad y_{cm} = \frac{23}{42}a$$

Vidimo da se CM nalazi lijevo od polovine tijela ( $x_{cm} < a$ ), iznad stranice AB kojom se tijelo naslanja na podlogu. To znači da ne postoji moment sile koji će htjeti nagnuti tijelo na brid BC. Tijelo je stabilno.

**(2 boda)**

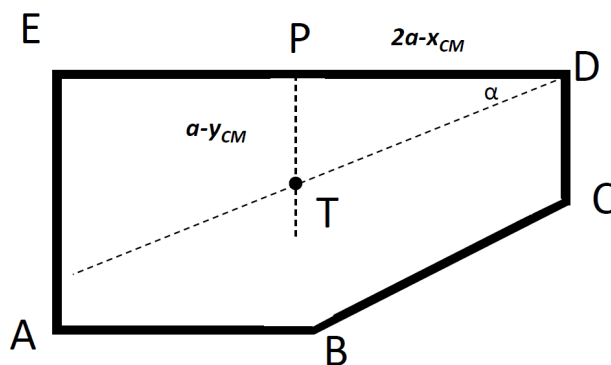
Kada tijelo ABCDE objesimo za točku D, vertikalno ispod tijela će se nalaziti centar mase.

**(1 bod)**

Na slici možemo vidjeti trokut TDP kojem možemo izračunati duljine kateta. Dužina TD je u smjeru gravitacije a DP je istog smjera kao i DE. Traženi kut  $\alpha$  možemo dobiti iz trigonometrije kuta:

**(2 boda)**

$$\tan \alpha = \frac{a - y_{CM}}{2a - x_{CM}} \Rightarrow \alpha = 22.4^\circ$$



### Zadatak 3 (14 bodova)

Brzina vala na užetu dana je s  $v = \sqrt{T/\mu}$  gdje je  $T$  napetost užeta a  $\mu = m/L$  linearna gustoća užeta.

**(2 boda)**

Ova formula ne vrijedi jer napetost užeta  $T$  ovisi o položaju užeta, tj.  $T = T(x)$ , no u zadatku uzimamo da je formula dobra aproksimacija. Uzmimo da je koordinata  $x = 0$  na dnu užeta te  $x = L$  na stropu. Tada na nekoj visini  $x$  promatramo dijelić užeta. Napetost tog dijela jednaka je masi užeta ispod njega koji ga napinje. Ispod njega se nalazi duljina  $x$  užeta, čija je masa  $m_x = \mu x$ . Stoga je  $T = m_x g = \mu x g$ . Brzina je tada dana s: **(4 boda)**

$$v = \sqrt{\frac{\mu x g}{\mu}} = \sqrt{gx}$$

Primjetimo sličnost izrazu za jednoliko ubrzano gibanje:  $v = \sqrt{2ax}$ . **(4 boda)**  
Vidimo da je gibanje brijega po užetu jednaku jednolikom ubrzanom gibanju uz zamjenu  $2a = g$ .

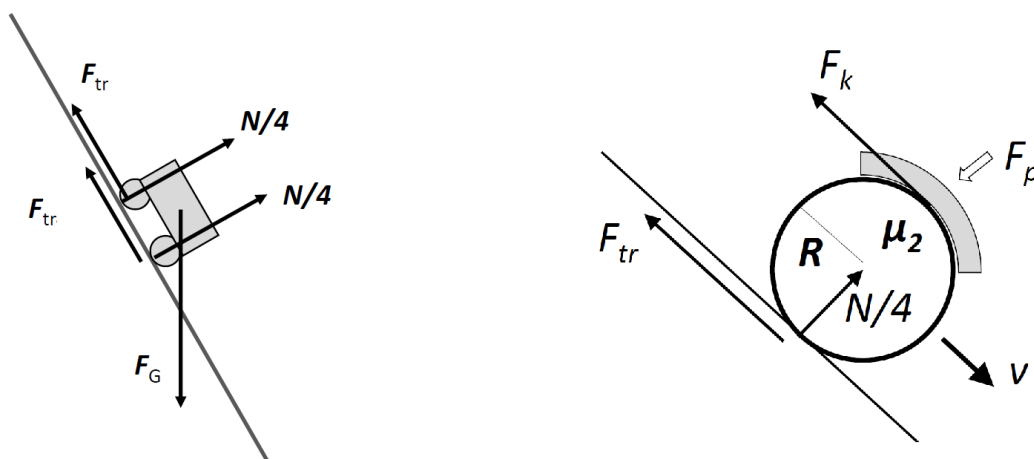
Duljina trajanja ukupnog putovanja vala, do stropa i natrag, jednaka je rješenju iz gibanja: **(2 boda)**

$$t = 2\sqrt{\frac{2L}{a}} = 2\sqrt{\frac{4L}{g}}$$

Rješenje je dakle  $t = 2.86$  s.

**(2 boda)**

#### Zadatak 4 (22 boda)



Skicirajmo prvo sile na kolica. Gravitacijska sila djeluje na centar mase cijelih kolica, dok otpor podloge  $N$  i sila trenja  $F_{tr}$  djeluju na svaki kotač pojedino. Ovdje smo odabrali da je ukupna sila trenja na kolica  $4F_{tr}$ , pa je na svakom kotaču  $F_{tr}$ . Isto tako, odabrali smo za otpor podloge drugačiji pristup, gdje je ukupni otpor podloge  $N$ , što znači da je na pojedini kotač  $N/4$ . Oba pristupa su valjana za obje vrste sila, dok je god dalje račun konzistentan. **(3 boda)**

Povežimo dalje rotaciju kotača i kočionu silu  $F_k$  sa gibanjem kolica i silom trenja  $F_{tr}$ . Za svaki pojedini kotač možemo raspisati sile koje djeluju na njega, kao na slici. Na slici je ucrtan i smjer gibanja cijelih kolica,  $v$ , koji ćemo koristiti kako bi odredili pozitivne smjerove gibanja i rotacije. Na kotač djeluju dvije sile koje uzrokuju rotaciju kotača, a to su  $F_k$  i  $F_{tr}$ . Sila otpora podloge  $N/4$  prolazi kroz centar rotacije kotača, stoga ne uzrokuje moment.  $F_k$  pokušava okrenuti kotač suprotno od smjera  $v$ , pa ćemo taj moment uzeti s

negativnim predznakom.  $F_{tr}$  je stoga povezan s momentom pozitivnog predznaka. Veza pritisne sile i kočione je sila trenja kotača s kočionim tijelom: **(4 boda)**

$$F_{tr} = \mu_2 F_p$$

Silu trenja potrebnu da se kolica zaustave nakon prijeđenog puta  $L_1 + L_2$  najlakše ćemo dobiti preko zakona očuvanja energije. Kolika spuštanjem niz kosinu gube gravitacijsko potencijalnu energiju koja se pretvara u kinetičku i troši kao rad trenja. S obzirom da kolica miruju na početku i na kraju, sva razlika u energiji je otišla na trenje kočenja, stoga: **(3 boda)**

$$E_{gp} = 4W_k$$

Za rad kočenja promotrimo put koji je tijelo prošlo i silu kočenja koja je djelovala na tom putu. S obzirom da je sila kočenja  $F_k$  djelovala na kotač, možemo promotriti kružni izraz za rad: **(3 boda)**

$$W = M_k \varphi = \mu_2 F_p (L_1 + L_2)$$

Drugi izraz je uvrštavanje ukupnog kuta kotača tokom gibanja, a to je upravo  $\varphi = R(L_1 + L_2)$ . **(2 boda)**

Pišemo zoe: **(2 boda)**

$$mg(L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin \alpha_2) = 4\mu_2 F_p (L_1 + L_2)$$

Konačno: **(3 boda)**

$$F_p = \frac{mg}{4\mu_2} \frac{L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin \alpha_2}{L_1 + L_2}$$

Dobivena pritisna sila je  $F_p = 600 \text{ N}$ . **(2 boda)**

Napomena: ovaj zadatak se može riješiti i iz jednadžbe gibanja.