

Državno natjecanje iz fizike 2020/2021
Srednje škole – 1. grupa
Rješenja i smjernice za bodovanje

1. zadatak (18 bodova)

Definirajmo koordinatni sustav mirnog promatrača tako da je u njemu brzina automobila u pozitivnom smjeru x -osi tj. $\vec{v}_A = v_A \hat{x}$. Tada je brzina metka u mirnom sustavu neposredno prije udara u vjetrobransko staklo automobila $\vec{v} = -v \hat{x}$. U sustavu, koji se giba brzinom automobila u odnosu na mirni sustav, brzina gumenog metka neposredno prije udara u vjetrobransko staklo je:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_A$$

$$\vec{v}' = -(v + v_A) \hat{x}$$

$$v' = -(v + v_A) = -74 \text{ km/h. (1 bod)}$$

Prilikom sudara gumeni metak se odbija od vjetrobranskog stakla pod istim kutem pod kojim i upada (vidi sliku). Neposredno nakon sudara horizontalna i vertikalna komponenta brzine metka su:

$$v'_{x0} = -\frac{1}{2} |v'| = -37 \text{ km/h (1 bod)}$$

$$v'_{y0} = \frac{\sqrt{3}}{2} |v'| = 64.1 \text{ km/h (1 bod)}$$

Komponente brzine metka u sustavu mirnog promatrača na tlu jednake su:

$$v_{x0} = v'_{x0} + v_A = 23 \text{ km/h (1 bod)}$$

$$v_{y0} = v'_{y0} \text{ (1 bod)}$$

Maksimalna visina, koju postiže metak, jednaka je:

$$h_{max} = h_0 + \frac{v_{y0}^2}{2g}$$

$$h_{max} = 1.5 \text{ m} + 16.2 \text{ m} = 17.7 \text{ m (3 boda)}$$

Vrijeme potrebno da metak padne na tlo jednako je zbroju vremena potrebnog do maksimalne visine i vremena pada s maksimalne visine na tlo. Najprije odredimo vrijeme potrebno da postigne maksimalnu visinu:

$$v_y(t) = v_{y0} - gt$$

U najvišoj točki putanje $v_y = 0$ pa slijedi:

$$t_1 = \frac{v_{y0}}{g} = 64.1 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} \cdot \frac{1}{9.81 \text{ m/s}^2} = 1.82 \text{ s (1 bod)}$$

Vrijeme pada s visine h_{max} jednako je:

$$h_{max} = \frac{1}{2} g t_2^2$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h_{max}}{g}} = 1.9 \text{ s (1 bod)}$$

Ukupno vrijeme potrebno da metak padne na tlo jednako je:

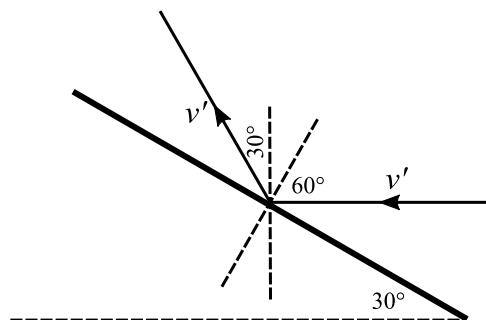
$$t_{pad} = t_1 + t_2 = 3.72 \text{ s. (1 bod)}$$

U tom vremenu metak će prijeći horizontalnu udaljenost:

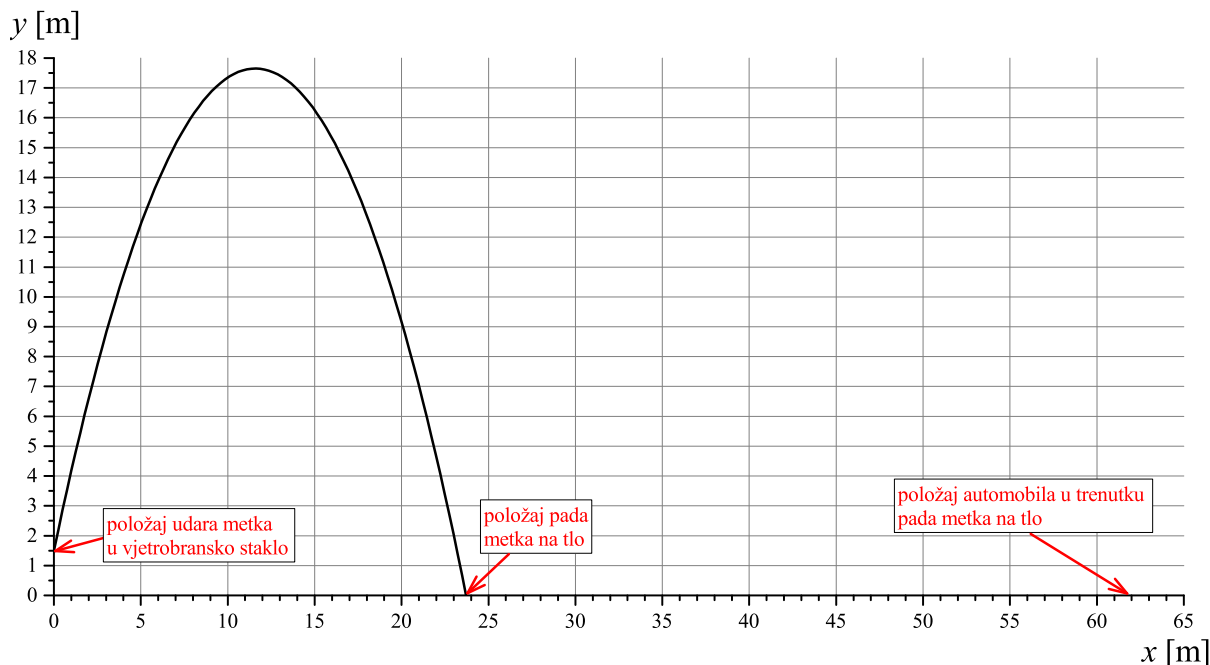
$$d = v_{x0} t_{pad} = 23 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} \cdot 3.72 \text{ s} = 23.8 \text{ m. (1 bod)}$$

U istom vremenu automobil će prijeći horizontalnu udaljenost:

$$d = v_A t_{pad} = 60 \cdot \frac{1000}{3600} \text{ m/s} \cdot 3.72 \text{ s} = 62 \text{ m. (1 bod)}$$

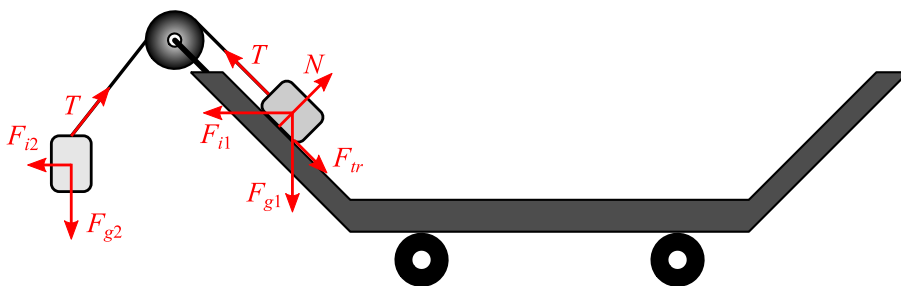


Horizontalna udaljenost metka i automobila u trenutku pada metka na tlo jednaka je $\Delta x = 62 \text{ m} - 23.8 \text{ m} = 38.2 \text{ m}$, što se može izračunati i kao $v'_{x0} t_{pad} = 38.2 \text{ m}$. (**1 bod**) Skica putanje i traženih položaja dana je na sljedećoj slici. (Točna skica putanje: **2 boda**, točno označeni položaji metka i automobila: **2 boda**).



2. zadatak (17 bodova)

Na slici su prikazane sile koje djeluju na oba utega u sustavu kolica (**2 boda** za dijagram sila). Pretpostavimo da bi se u slučaju gibanja utega u odnosu na kolica uteg mase m_1 gibao uz kosu stranicu kolica. Kut koji kosina kolica zatvara s horizontalom je 45° .



Drugi Newtonov zakon za uteg mase m_1 (u slučaju mirovanja u odnosu na kolica) pišemo po komponentama paralelno i okomito na kosinu:

$$0 = T + \frac{\sqrt{2}}{2} F_{i1} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{g1} - F_{tr} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

$$0 = N - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{i1} - \frac{\sqrt{2}}{2} F_{g1} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

Drugi Newtonov zakon za uteg mase m_2 (u slučaju mirovanja u odnosu na kolica) pišemo po komponentama paralelno i okomito na horizontalnu podlogu:

$$0 = T_x - F_{i2} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

$$0 = T_y - F_{g2} \quad (\mathbf{1 \text{ bod}})$$

Inercijalna sila na utege je: $F_{i1} = m_1 a$, $F_{i2} = m_2 a$ (**1 bod**). Uvrštavanjem u jednačbe za uteg mase m_2 dobije se:

$$0 = T_x - m_2 a$$

$$0 = T_y - m_2 g$$

Sada možemo izračunati napetost užeta T :

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = m_2 \sqrt{a^2 + g^2} = m_2 \sqrt{\frac{9}{16}g^2 + g^2} = \frac{5}{4}m_2 g. \text{ (2 boda)}$$

U jednačbe za uteg mase m_1 uvrstimo napetost užeta T , izraz za inercijalnu silu F_{i1} i silu trenja $F_{tr} = \mu N$ (**1 bod**):

$$0 = \frac{5}{4}m_2 g + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 a - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g - \mu N$$

$$0 = N - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 a - \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 g$$

Iz druge jednačbe slijedi da je sila reakcije podloge N jednaka:

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1(a + g) = \frac{\sqrt{2}}{2}m_1 \frac{7}{4}g = \frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g \text{ (3 boda)}$$

Uvrštavanjem u prvu jednačbu dobije se:

$$\mu \frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g = \frac{5}{4}m_2 g + \frac{\sqrt{2}}{2}m_1(a - g)$$

$$\mu \frac{7\sqrt{2}}{8}m_1 g = \frac{5}{4}m_2 g - \frac{\sqrt{2}}{8}m_1 g$$

$$\mu = \frac{10}{7\sqrt{2}} \frac{m_2}{m_1} - \frac{1}{7}$$

$$\mu = \frac{1}{7} \left(\frac{5}{\sqrt{2}} - 1 \right) = 0.362 \text{ (4 boda)}$$

3. zadatak (17 bodova)

Novčići B i C dobit će brzinu u smjeru spojnice središta novčića s novčićem A tj. okomito na tangentu na obod novčića u točki dodira s novčićem A (vidi sliku). Zbog simetrije problema iznosi brzina novčića B i C nakon sudara bit će jednaki $v'_B = v'_C = v'$. (**1 bod**)

Zakon očuvanja količine gibanja za ovaj sudar napišemo po komponentama u koordinatnom sustavu:

$$mv_A = mv'_A + mv'_{Bx} + mv'_{Cx} \text{ (1 bod)}$$

$$0 = mv'_{By} - mv'_{Cy} \text{ (1 bod)}$$

Zakon očuvanja energije glasi:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2 + \frac{1}{2}mv_C'^2 \text{ (2 boda)}$$

Nakon sređivanja dobiju se sljedeće jednačbe:

$$v_A = v'_A + 2v'_x \text{ (1 bod)}$$

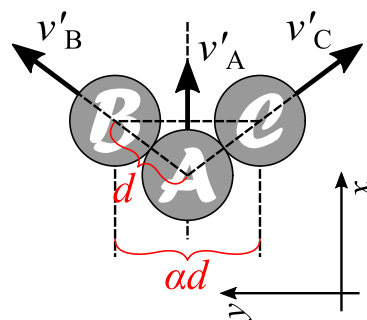
$$v_A^2 = v_A'^2 + 2v'^2 \text{ (1 bod)}$$

Pomoću sličnosti trokuta dobije se da vrijedi:

$$\frac{v'_y}{v'} = \frac{\frac{1}{2}\alpha d}{d} \text{ (2 boda)}$$

Prema tome komponente brzine novčića B i C nakon sudara izrazimo na sljedeći način:

$$v'_y = \frac{1}{2}\alpha v', v'_x = \sqrt{v'^2 - v_y'^2} = v' \sqrt{1 - \frac{1}{4}\alpha^2} \text{ (2 boda)}$$



Dalje rješavamo sustav jednačbi:

$$v_A - v'_A = 2v'_x$$

$$v_A^2 - v'^2_A = (v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = 2v'^2$$

Prvu jednačbu kvadriramo i uvrstimo izraz za v'_x :

$$(v_A - v'_A)^2 = 4v'^2 \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right)$$

Iz druge jednačbe uvrstimo v'^2 :

$$(v_A - v'_A)^2 = 2(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) \left(1 - \frac{1}{4}\alpha^2\right)$$

$$v'_A \left(2 - \frac{1}{2}\alpha^2 + 1\right) = v_A \left(1 - 2 + \frac{1}{2}\alpha^2\right)$$

$$v'_A(6 - \alpha^2) = v_A(\alpha^2 - 2)$$

Slijedi da je brzina novčića A nakon sudara:

$$v'_A = v_A \frac{\alpha^2 - 2}{6 - \alpha^2} \quad (4 \text{ boda})$$

Novčić A miruje nakon sudara kada je ispunjen uvjet:

$$v'_A = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 = 0 \Rightarrow \alpha = \sqrt{2} \quad (2 \text{ boda})$$

4. zadatak (18 bodova)

Sve sile, koje djeluju na uteg u početnom položaju prikazane su na slici desno. Kut između kose stranice posude i vertikale je 30° . Iz uvjeta da uteg miruje slijedi sljedeća jednačba za smjer paralelan kosini:

$$0 = mg \frac{\sqrt{3}}{2} + F_{o1} - F_{o2} \quad (1 \text{ bod})$$

Sile opruge F_{o1} i F_{o2} jednake su:

$F_{o1} = k(l_1 - l_0)$, $F_{o2} = k(l_2 - l_0)$ (1 bod), gdje je l_0 duljina nerastegnute opruge. Na slici se može vidjeti da vrijedi:

$$h_0 = \frac{d}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}l_1,$$

slijedi da je $l_1 = \frac{1}{3}d$. (1 bod)

Duljina $l_2 = d - l_1 = \frac{2}{3}d$. (1 bod)

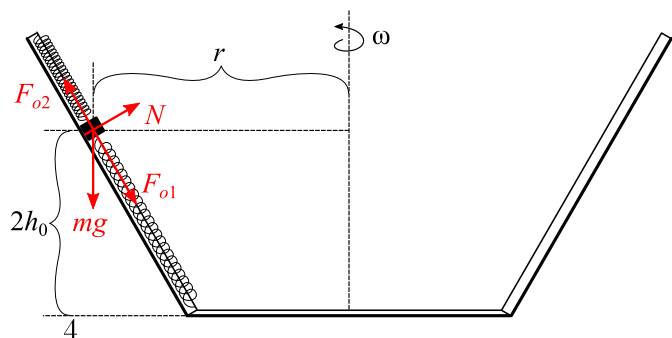
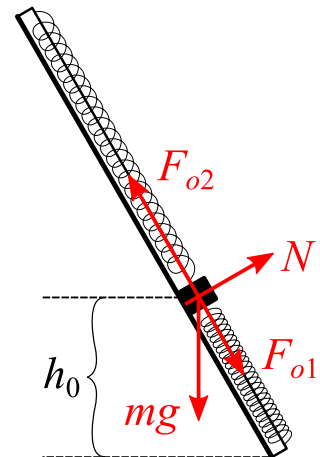
Uvrstimo u početnu jednačbu:

$$0 = mg \frac{\sqrt{3}}{2} + k \left(\frac{1}{3}d - l_0\right) - k \left(\frac{2}{3}d - l_0\right)$$

$$\frac{1}{3}kd = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k = \frac{3\sqrt{3}mg}{2d} \quad (2 \text{ boda})$$

U slučaju kada posuda rotira položaj utega i sve sile koje djeluju na uteg prikazane su na slici desno. Zbroj svih sila na tijelo jednak je centripetalnoj sili. Drugi Newtonov zakon napišemo po komponentama:



$$F_{cp} = N \frac{\sqrt{3}}{2} + F'_{o1} \frac{1}{2} - F'_{o2} \frac{1}{2}, \text{ (1 bod)}$$

$$mg + F'_{o1} \frac{\sqrt{3}}{2} = N \frac{1}{2} + F'_{o2} \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ (1 bod)}$$

Sile opruge sada su jednake: $F'_{o1} = k(l'_1 - l_0)$, $F'_{o2} = k(l'_2 - l_0)$, gdje je:

$$l'_1 = 2h_0 \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}d,$$

$$l'_2 = d - l'_1 = \frac{1}{3}d. \text{ (1 bod)}$$

Uvrstimo u drugu jednadžbu:

$$mg + k \left(\frac{2}{3}d - l_0 - \frac{1}{3}d + l_0 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = N \frac{1}{2}$$

$$N = 2mg + \frac{1}{\sqrt{3}}kd$$

$$N = 2mg + \frac{d}{\sqrt{3}} \frac{3\sqrt{3}mg}{2d}$$

$$N = \frac{7}{2}mg \text{ (2 boda)}$$

Centripetalna sila je $F_{cp} = m \frac{v^2}{r}$ (1 bod). Uvrštavanjem izraza za F_{cp} i N u prvu jednadžbu dobije se:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{7}{2}mg \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}kd \frac{1}{2}$$

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{7\sqrt{3}}{4}mg + \frac{1}{6} \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{mg}{d}d$$

$$\frac{v^2}{r} = 2\sqrt{3}g \text{ (2 boda)}$$

Brzina kružnog gibanja jednaka je $v = r\omega$, a polumjer gibanja je jednak:

$$r = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}l'_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) d = \frac{5}{6}d \text{ (1 bod)}.$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$\frac{5}{6}d\omega^2 = 2\sqrt{3}g$$

$$\omega^2 = \frac{12\sqrt{3}g}{5d} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12\sqrt{3}g}{5d}} = 7.4 \text{ rad/s (3 boda)}$$