Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

1. Odredi sve trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{aligned} x^2 - y &= z^2, \\ y^2 - z &= x^2, \\ z^2 - x &= y^2. \end{aligned}$$

2. Dokaži da ne postoje prirodni brojevi a i b koji zadovoljavaju jednakost

$$3^a - 2^b = 2021.$$

3. U trapezu $ABCD$ zbroj duljina osnovica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ jednak je duljini kraka $\overline{AD}$. Pravac paralelan osnovicama kroz sjecište dijagonala siječe krak $\overline{AD}$ u točki E. Dokaži da je $\sphericalangle BEC = 90°$.

4. Neka su a, b i c realni brojevi koji zadovoljavaju jednakost

$$|a + b| + |a + c| + |b + c| = 8.$$

Odredi najveću i najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + b^2 + c^2$$

te odredi kada se ona postiže.

5. U nekom jeziku svaka je riječ niz slova a i b. Svaka riječ ima barem jedno i najviše 13 slova, no nisu svi takvi nizovi riječi. Poznato je da nadovezivanjem jedne riječi na drugu nikad ne dobivamo riječ. Odredi najveći mogući broj riječi u tom jeziku.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

1. Odredi sve parove (x, y) realnih brojeva za koje vrijedi

$$x + \frac{1}{y-x} = 1 \qquad \text{i} \qquad y + \frac{1}{x-y} = 2.$$

2. Neka je (a, b, c) trojka prirodnih brojeva za koje vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.

Dokaži da broj $\left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right)^2$ nije prirodan te da je veći od 8.

3. Neka je ABC trokut takav da je $|AB| < |BC|$ i $\sphericalangle BAC = 45°$. Tangente na kružnicu opisanu tom trokutu u točkama B i C sijeku se u točki D. Pravci AC i BD se sijeku u točki E te vrijedi $|EA| = 3$ i $|AC| = 8$. Odredi površinu trokuta CDE.

4. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$2^a \cdot 5^b - 1 = 11 \cdot 3^c.$$

5. Teta u vrtiću nadgleda igru n djece koja sjede raspoređena ukrug. Svako dijete ima određeni broj bombona. Igra se sastoji od niza ovakvih *koraka*:

Svakom djetetu koje ima neparan broj bombona teta daje po još jedan bombon te svako dijete podijeli svoje bombone na dvije jednake hrpe. Zatim, u istom trenutku, svako dijete daje polovinu svojih bombona djetetu koje sjedi neposredno desno od njega.

Dokaži da će nakon konačno mnogo koraka sva djeca imati jednak broj bombona.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

1. Odredi sve prirodne brojeve n među čijim djeliteljima postoje djelitelji a i b takvi da je

$$a + b = n - 1.$$

2. Neka je $\alpha = \dfrac{2\pi}{2021}$. Izračunaj

$$\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos 1010\alpha.$$

3. Na kraćem luku $\widehat{CD}$ kružnice opisane kvadratu $ABCD$ nalazi se točka M. Neka su P i Q redom sjecišta pravca AM s $\overline{BD}$ i $\overline{CD}$ te neka su R i S redom sjecišta pravca BM s $\overline{AC}$ i $\overline{CD}$. Dokaži da su dužine $\overline{PS}$ i $\overline{QR}$ međusobno okomite.

4. Zapisan je niz od n realnih brojeva među kojima je barem jedan pozitivan. Od članova tog niza označeni su

(a) svi pozitivni brojevi te

(b) svi brojevi kojima započinje neki niz uzastopnih članova tog niza pozitivnog zbroja.

Dokaži da je zbroj svih označenih brojeva pozitivan.

5. U raznostraničnom trokutu ABC duljine dviju visina jednake su duljinama dviju težišnica. Koliki je omjer duljina preostale visine i preostale težišnice?

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske
Agencija za odgoj i obrazovanje
Hrvatsko matematičko društvo

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

11. svibnja 2021.

1. Neka je (x_n) niz takav da je $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, sa svojstvom da je niz (y_n) zadan relacijom

$$y_n = \binom{n}{0}x_0 + \binom{n}{1}x_1 + \ldots + \binom{n}{n}x_n, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}_0$$

geometrijski niz. Odredi x_{2020}.

2. Neka je $n \geqslant 2$ prirodan broj te neka je $(p_1, \ldots, p_n)$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pokaži da vrijedi

$$\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_2 + p_3} + \ldots + \frac{1}{p_k + p_{k+1}} + \ldots + \frac{1}{p_{n-1} + p_n} > \frac{n-1}{n+2}.$$

3. Odredi sve trojke prirodnih brojeva (a, b, c) za koje vrijedi

$$2^a + 2021 = 3^b \cdot 25^c.$$

4. Dana je ploča dimenzija $n \times n$ i po jedna pločica dimenzija 1×1, 1×2, $\ldots$, $1 \times n$.

Na koliko načina je moguće odabrati $\frac{1}{2}n(n+1)$ polja ploče tako da odabrani dio bude moguće prekriti horizontalno postavljenim pločicama, ali također i vertikalno postavljenim pločicama?

5. Dan je trokut ABC čije je središte upisane kružnice točka I. Odabrane su dvije točke, točka D na luku $\widehat{AB}$ opisane kružnice trokuta ABC koji ne sadrži točku C, te točka E na dužini $\overline{BC}$, tako da vrijedi $\sphericalangle ADI = \sphericalangle IEC$. Dokaži da postoji točka, neovisna o odabiru točaka D i E, kojom pravac DE prolazi.

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.