

Rješenja zadataka za Državno natjecanje iz astronomije 2021. g.

3. razred srednje škole

12. - 14. svibnja 2021. g.

15	
----	--

1. Izračunajte siderički period rotacije planeta koji se giba po kružnoj stazi oko zvijezde mase $M = 2 \cdot 10^{31}$ kg na udaljenosti od $r = 1,2 \cdot 10^{11}$ m. Ako je masa planeta $m_p = 8 \cdot 10^{24}$ kg, a polumjer $r_p = 6000$ km, izračunajte prvu kozmičku brzinu na tom planetu (izraženu u km/s) i visinu staze geostacionarnog satelita oko tog planeta. Sinodički dan na tom planetu iznosi 20 sati, a rotacija mu je progradna. Gravitacijska konstanta iznosi $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$. Koliko bi iznosio siderički period rotacije tog planeta kad bi imao retrogradnu rotaciju, a da sinodički dan i dalje traje 20 sati?

Rješenje:

$$M = 2 \cdot 10^{31} \text{ kg}$$

$$r = 1,2 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

$$S = 20 \text{ h} = 72000 \text{ s}$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$m_p = 8 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$r_p = 6000 \text{ km}$$

$$T_{\text{rot1}} = ?; T_{\text{rot2}} = ?; v_1 = ?; h_{\text{geo}} = ?$$

$$F_c = F_g$$

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\left(\frac{2r\pi}{T} \right)^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow \frac{4r^2\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = \sqrt{\frac{4r^3\pi^2}{GM}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot (1,2 \cdot 10^{11} \text{ m})^3 \cdot \pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{31} \text{ kg}}} = 7,15 \cdot 10^6 \text{ s} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\frac{1}{T_{\text{rot}}} = \frac{1}{S} + \frac{1}{T} \Rightarrow T_{\text{rot}} = \frac{S \cdot T}{S + T} \quad (1 \text{ bod})$$

$$T_{\text{rot}} = \frac{7,2 \cdot 10^4 \text{ s} \cdot 7,15 \cdot 10^6 \text{ s}}{7,2 \cdot 10^4 \text{ s} + 7,15 \cdot 10^6 \text{ s}} \approx 71280 \text{ s} = 19 \text{ h } 48 \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

Za retrogradnu rotaciju uzimamo u istu jednadžbu za izračun sideričkog dana samo negativni predznak za sinodičku rotaciju (1 bod)

$$T_{\text{rot}} = \frac{-7,2 \cdot 10^4 \text{ s} \cdot 7,15 \cdot 10^6 \text{ s}}{-7,2 \cdot 10^4 \text{ s} + 7,15 \cdot 10^6 \text{ s}} \approx -72730 \text{ s} \approx -20 \text{ h } 12 \text{ m} \quad (1 \text{ bod})$$

iz jednadžbe $T = \sqrt{\frac{4r^3\pi^2}{GM}}$ dobijemo:

$$r = \sqrt[3]{\frac{Gm_p T_{\text{rot}}^2}{4\pi^2}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 71280^2 \text{ s}^2}{4\pi^2}} = 4,096 \cdot 10^7 \text{ m} = 4,096 \cdot 10^4 \text{ km} \quad (1 \text{ bod})$$

$$h = r - r_p \quad (1 \text{ bod})$$

$$h = 40960 \text{ km} - 6000 \text{ km} = 34960 \text{ km} \quad (1 \text{ bod})$$

Iz jednadžbe $\frac{mv^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}$ slijedi:

$$v_I = \sqrt{\frac{Gm_p}{r}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_I = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \cdot 8 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6 \cdot 10^6 \text{ m}}} = 9430 \text{ m/s} \quad (1 \text{ bod})$$

$$v_I = 9,43 \text{ km/s} \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupno: 15 bodova

2. Promjer objektiva teleskopa iznosi 235 mm, a f-broj je $f/10$. Kolika je žarišna daljina okulara s kojim možemo na tom teleskopu postići povećanje od $188\times$? Izračunajte prividno vidno polje okulara ako zvijezda s deklinacijom $\delta = -20^\circ$ prođe kroz sredinu i preko cijelog vidnog polja za 90 sekundi. Kolika je moć razlučivanja tog teleskopa i njegova granična magnituda ako je promjer zjenice oka motritelja 7 mm, a prividna zvjezdana veličina na granici osjetljivosti oka iznosi $6,5^m$? Uzmite da promatramo svjetlost valne duljine $\lambda = 550 \text{ nm}$.

Rješenje:

$$D = 235 \text{ mm}$$

$$\text{f-broj} = f/10$$

$$A = 188\times$$

$$\delta = -20^\circ$$

$$t = 90 \text{ s} = 1,5 \text{ m}$$

$$p = 7 \text{ mm}$$

$$m_g = 6,5^m$$

$$\lambda = 550 \text{ nm}$$

$$f_{\text{ok}} = ?; PVP = ?; \varphi = ?; m_1 = ?$$

$$F = \text{f-broj} \cdot D = 10 \cdot 235 \text{ mm} = 2350 \text{ mm} \quad (1 \text{ bod})$$

$$A = \frac{F}{f_{\text{ok}}} \quad (1 \text{ bod})$$

$$f_{\text{ok}} = \frac{F}{A} = \frac{2350 \text{ mm}}{188\times} = 12,5 \text{ mm} \quad (1 \text{ bod})$$

$$VP = t \cdot \omega \cdot \cos \delta \quad (1 \text{ bod})$$

Napomena: ω prividna kutna rotacija neba iznosi $15^\circ/\text{h}$, odn. $0,25^\circ/\text{m}$

$$VP = 1,5 \text{ m} \cdot 0,25^\circ/\text{m} \cdot \cos \delta = 1,5 \text{ m} \cdot 0,25^\circ/\text{m} \cdot 0,9397 \approx 0,3524^\circ \approx 21,14' \approx 21'8''$$

(2 boda)

Napomena: VP izračunato bez korekcije $\cos \delta$ (1 bod)

$$PVP = VP \cdot A = 0,3524^\circ \cdot 188 \times = 66,25^\circ \approx 66^\circ \quad (1 \text{ bod})$$

$$2,512^{(m_1 - m_g)} = \frac{D^2}{p^2} \quad (1 \text{ bod})$$

$$m_1 = m_g + 5 \cdot \log \frac{D}{p} \quad (1 \text{ bod})$$

$$m_1 = 6,5^m + 5 \cdot \log \frac{235 \text{ mm}}{7 \text{ mm}} = 14,1^m \approx 14^m \quad (1 \text{ bod})$$

$$\sin \varphi = \frac{\lambda}{D} \text{ ili } \sin \varphi = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \quad (1 \text{ bod})$$

$$\varphi = \arcsin \frac{\lambda}{D} = \arcsin \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{0,235 \text{ m}} = 1,341 \cdot 10^{-4} = 0,48''$$

ili (1 bod)

$$\varphi = \arcsin 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} = \arcsin 1,22 \cdot \frac{5,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{0,235 \text{ m}} = 1,636 \cdot 10^{-4} = 0,59''$$

Ukupno: 12 bodova

10	
----	--

3. Koliko iznose apsolutne magnitude dviju hipotetskih zvijezda čije zvjezdane paralakse iznose $p_1 = 0,5''$, odn. $p_2 = 2,5''$ ako su njihove prividne zvjezdane veličine gledane s nekog planeta iste i iznose $m = 5^m$? Izračunajte udaljenost obje zvijezde u svjetlosnim godinama i parsecima, te odredite koliko puta je apsolutni sjaj jedne veći od druge.

Rješenje:

$$p_1 = 0,5''$$

$$p_2 = 2,5''$$

$$m = 5^m$$

$$M_1 = ?; M_2 = ?; d_1 = ?; d_2 = ?; \frac{L_1}{L_2} = ?$$

$$d_{pc} = \frac{1}{p} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_{1pc} = \frac{1}{p_1} = \frac{1}{0,5''} = 2 \text{ pc} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_1 = 2 \text{ pc} = 2 \cdot 3,26 \text{ g.s.} = 6,52 \text{ g.s.} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_{2pc} = \frac{1}{p_2} = \frac{1}{2,5''} = 0,4 \text{ pc} \quad (1 \text{ bod})$$

$$d_2 = 0,4 \text{ pc} = 0,4 \cdot 3,26 \text{ g.s.} = 1,3 \text{ g.s.} \quad (1 \text{ bod})$$

$$M = m + 5 - 5 \log d_{pc} \quad (1 \text{ bod})$$

$$M_1 = m + 5 - 5 \log d_{1pc} = 5 + 5 - 5 \log 2 = 8,49^m \approx 8,5^m \quad (1 \text{ bod})$$

$$M_2 = m + 5 - 5 \log d_{2pc} = 5 + 5 - 5 \log 0,4 = 11,99^m \approx 12^m \quad (1 \text{ bod})$$

$$\frac{L_1}{L_2} = 2,512^{(M_2 - M_1)} \quad (1 \text{ bod})$$

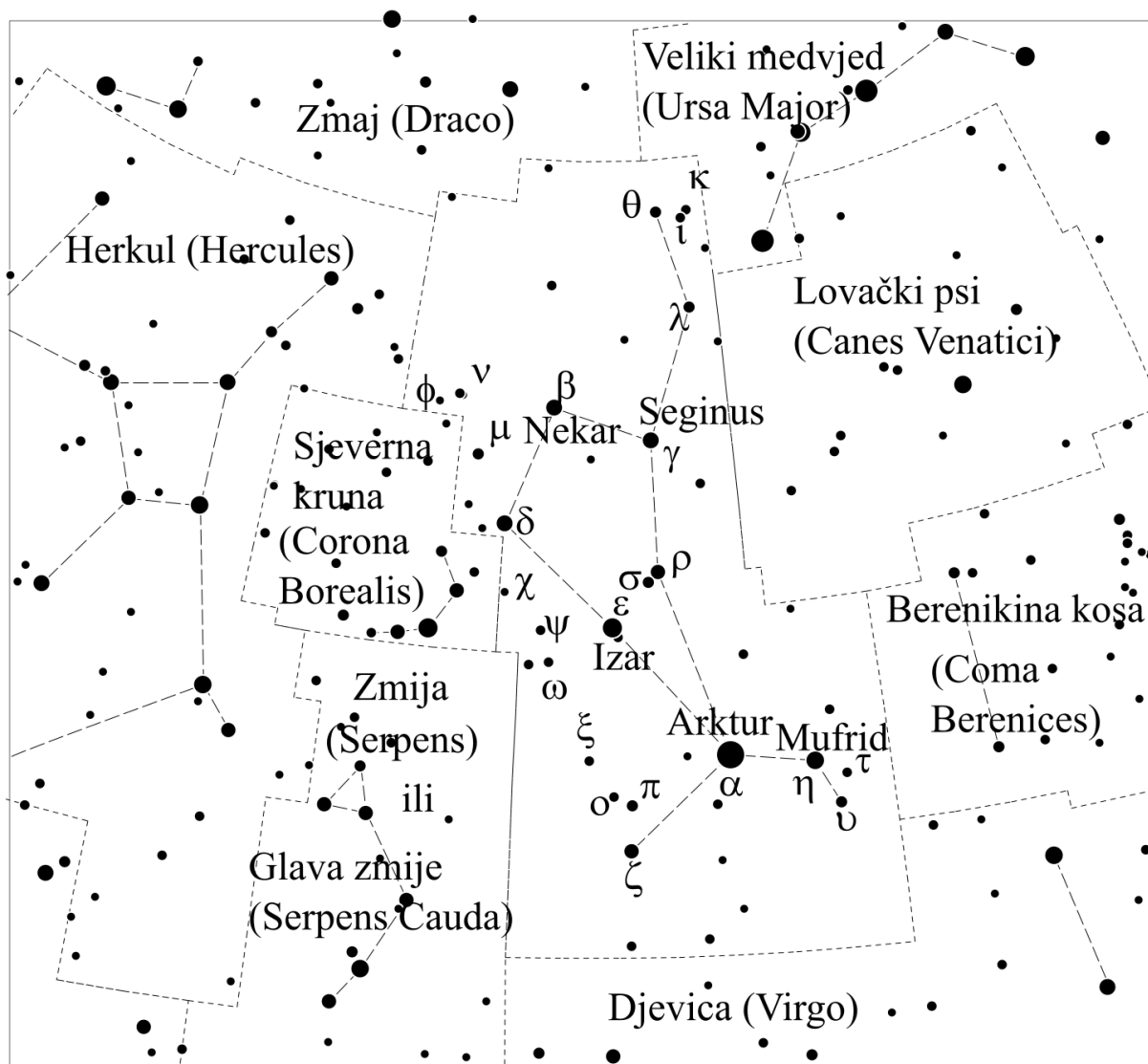
$$\frac{L_1}{L_2} = 2,512^{12 - 8,5} = 2,512^{3,5} = 25,12 \approx 25 \quad (1 \text{ bod})$$

Ukupno: 10 bodova

13	
----	--

4. Na karti zvijezda Volara:

- a) uz odgovarajuće zvijezde napišite imena barem tri zvijezde u tom zvijezđu;
- b) uz odgovarajuće zvijezde napišite ispravno Bayerove oznake za barem četiri zvijezde u tom zvijezđu;
- c) unutar njihovih granica napišite nazive barem šest zvijezda koja graniče s Volarom



a) Pravilno napisana imena: svako ime **1 bod**, maksimalno **3 boda**

α - Arktur, Arcturus

β - Nekar, Nekkar, Meres

γ - Seginus, Haris as-sama, Haris as-samak

ϵ - Izar, Mirak, Pulcherrima

η - Mufrid, Mifrid

b) svaka ispravno obilježena zvijezda Bayerovom oznakom po **1 bod**, maksimalno **4 boda**

c) Svako napisano ime zvijezda unutar njegovih granica po **1 bod**, maksimalno **6 bodova**

Ukupno 13 bodova