ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. ožujka 2021.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Maja, Ana i Ivan imaju zajedno 150 kn. Ivan je dao Maji 13 kn, Maja je dala Ani 22 kn, a Ana je dala Ivanu 33 kn. Nakon toga svatko od njih imao je jednaki iznos. Koliko je kuna na početku imala Maja, koliko Ana, a koliko Ivan?

Rješenje.

Prvi način:
Na kraju svako dijete ima jednaki iznos, što znači da svatko na kraju ima po
(150 : 30) kn = 50 kn. 1 BOD
Ivan je od Ane dobio 33 kn, prije toga je imao
(50 - 33) kn = 17 kn. 1 BOD
Ivan je dao Maji 13 kn, prije toga je imao
(17 + 13) kn = 30 kn. 1 BOD
Ivan je na početku imao 30 kn. 1 BOD
Maja je Ani dala 22 kn, prije toga je imala
(50 + 22) kn = 72 kn. 1 BOD
Maja je od Ivana dobila 13 kn, prije toga je imala
(72 - 13) kn = 59 kn. 1 BOD
Maja je na početku imala 59 kn. 1 BOD
Ana je Ivanu dala 33 kn, prije toga je imala
(50 + 33) kn = 83 kn. 1 BOD
Ana je od Maje dobila 22 kn, prije toga je imala
(83 - 22) kn = 61 kn. 1 BOD
Ana je na početku imala 61 kn. 1 BOD
…………………………………………………………………………..….… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Na kraju svako dijete ima jednaki iznos, što znači da svatko na kraju ima po
(150 : 30) kn = 50 kn. 1 BOD
Ivan je dao Maji 13 kn, prije toga je imao
(50 + 13) kn = 63 kn. 1 BOD
Ivan je od Ane dobio 33 kn, prije toga je imao
(63 - 33) kn = 30 kn. 1 BOD
Ivan je na početku imao 30 kn. 1 BOD
Maja je od Ivana dobila 13 kn, prije toga je imala
(50 - 13) kn = 37 kn. 1 BOD
Maja je Ani dala 22 kn, prije toga je imala
(37 + 22) kn = 59 kn. 1 BOD
Maja je na početku imala 59 kn. 1 BOD
Ana je od Maje dobila 22 kn, prije toga je imala
(50 - 22) kn = 28 kn. 1 BOD
Ana je Ivanu dala 33 kn, prije toga je imala
(28 + 33) kn = 61 kn. 1 BOD
Ana je na početku imala 61 kn. 1 BOD
…………………………………………………………………………..….… UKUPNO 10 BODOVA

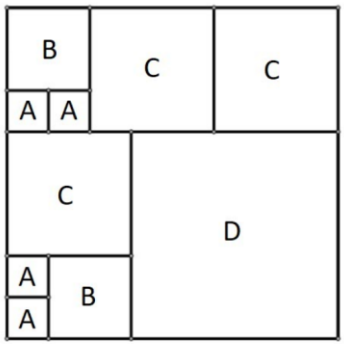
Treći način:
Na kraju svako dijete ima jednaki iznos, što znači da svatko na kraju ima po (150 : 3) kn = 50 kn.

	na kraju	prije nego je Ana dala Ivanu 33 kn		prije nego je Maja dala Ani 22 kn		prije nego je Ivan dao Maji 13 kn	
Maja	50	50		50 + 22 = 72	1 BOD	72 – 13 = 59	1 BOD
Ana	50	50 + 33 = 83	1 BOD	83 – 22 = 61	1 BOD	61	
Ivan	50	50 – 33 = 17	1 BOD	17		17 + 13 = 30	1 BOD
	1 BOD						

Na početku je Maja imala 59 kn, Ana 61 kn, a Ivan 30 kn. 3 BODA
………………………………………………………………….………...….... UKUPNO 10 BODOVA

Četvrti način:
Na kraju svako dijete ima jednaki iznos, što znači da svatko na kraju ima po
(150 : 30) kn = 50 kn. 1 BOD
Ivan je od Ane dobio 33 kn, a Maji je dao 13 kn.
On je u razmjeni dobio 33 – 13 = 20 kn. 1 BOD
Ivan je na početku imao 50 – 20 = 30 kn. 2 BODA
Maja je Ani dala 22 kn, a od Ivana je dobila 13 kn.
U razmjeni je izgubila 22 – 13 = 9 kn, 1 BOD
Maja je na početku imala 50 + 9 = 59 kn. 2 BODA
Ana je Ivanu dala 33 kn, a od Maje je dobila 22 kn.
U razmjeni je izgubila 33 – 22 = 11 kn. 1 BOD
Ana je na početku imala 50 + 11 = 61 kn. 2 BODA
…………………………………………………………………………….... UKUPNO 10 BODOVA

2. Kvadrat na slici sastavljen je od više manjih kvadrata. Izračunaj njegovu površinu ako je opseg kvadrata B jednak 56 cm.



Rješenje.

Prvi način:
Duljina stranice kvadrata B je 14 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata A je 7 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata C je 21 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata D je 35 cm.
Površina kvadrata B je 196 cm^2, 1 BOD
površina kvadrata A je 49 cm^2, 1 BOD
površina kvadrata C je 441 cm^2, 1 BOD
površina kvadrata D je 1225 cm^2. 1 BOD
Površina kvadrata na slici jednaka je

$P = 4 \cdot 49 + 2 \cdot 196 + 3 \cdot 441 + 1\,225$ 1 BOD

$P = 3136\ \text{cm}^2$. 2 BODA

……………………………………………………………………....………….... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Duljina stranice kvadrata B je 14 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata A je 7 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata C je 21 cm, 1 BOD
duljina stranice kvadrata D je 35 cm.
Duljina stranice kvadrata na slici jednaka je
14 + 21 + 21 = (ili 14 + 7 + 21 + 7 + 7 ili 21 + 35 ili 7 + 14 + 35) 2 BODA
= 56 cm. 2 BODA
Površina kvadrata na slici jednaka je
$P = 56 \cdot 56$ 1 BOD

$P = 3136\ \text{cm}^2$. 2 BODA

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Za točan rezultat nije nužno izračunati duljinu stranice pravokutnika D.

3. U ljetni matematički kamp zaputilo se 713 učenika u 25 autobusa, od kojih neki imaju 33 sjedala, a neki 26 sjedala. Ako je poznato da su učenici popunili sva mjesta u autobusima, koliko je bilo autobusa s 33 sjedala, a koliko autobusa s 26 sjedala?

Rješenje.

Prvi način:

Pretpostavimo da svaki od 25 autobusa ima 26 sjedala. 1 BOD
Tada se u njih može smjestiti 25 · 26 = 1 BOD
= 650 učenika. 1 BOD
Tada bi 713 – 650 = 1 BOD
= 63 učenika ostalo bez sjedala. 1 BOD
Kako je 33 – 26 = 7, veći autobus može primiti sedmero djece više od manjeg. 1 BOD
Kako je 63 : 7 = 9,
9 manjih autobusa treba zamijeniti s 9 većih autobusa. 1 BOD
Preostalih 25 – 9 = 16 autobusa je malih. 1 BOD
Bilo je 9 autobusa s 33 sjedala i 16 autobusa s 26 sjedala. 2 BODA
………………………………………………………………….………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Pretpostavimo da svaki od 25 autobusa ima 33 sjedala. 1 BOD
Tada se u njih može smjestiti 25 · 33 = 1 BOD
= 825 učenika. 1 BOD
Tada bi 825 – 713 = 1 BOD
= 112 sjedala ostalo prazno. 1 BOD
Kako je 33 – 26 = 7, manji autobus može primiti sedmero djece manje od većeg. 1 BOD
Kako je 112 : 7 = 16,
16 velikih autobusa treba zamijeniti sa 16 malih autobusa. 1 BOD
Preostalih 25 – 16 = 9 autobusa je velikih. 1 BOD
Bilo je 9 autobusa s 33 sjedala i 16 autobusa s 26 sjedala. 2 BODA
…………………………………………………………………………….... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako je učenik došao do rješenja uzastopnim približavanjem, dobiva sve bodove, a ako je napisao samo rješenje bez postupka, dobiva 2 BODA.

4. Roko i Marko imaju jednako duge korake. Međusobno su udaljeni 1 600 koraka. U jednoj minuti Roko napravi 80 koraka, a Marko 60 koraka. Tko od njih dvojice treba krenuti ranije i koliko ranije da bi se hodajući jedan prema drugom sreli točno na pola puta? Rješenje izrazi u minutama i sekundama.

Rješenje.

Prvi način:

Za polovinu puta treba napraviti 800 koraka. 1 BOD
Roku je za to potrebno 800 : 80 = 10 minuta. 1 BOD
Za 10 minuta Marko prijeđe 10 · 60 = 600 koraka. 1 BOD
Marko treba krenuti ranije. 1 BOD
Marko treba krenuti toliko vremena ranije za koliko prijeđe 200 koraka. 1 BOD
Za 1 minutu Marko prijeđe 60 koraka pa za 3 minute prijeđe 180 koraka. 1 BOD
Budući da 60 koraka prijeđe za 60 sekundi,
preostalih 20 koraka prijeći će za 20 sekundi. 2 BODA
Dakle, Marko treba krenuti 180 + 20 = 200 sekundi prije Roka. 1 BOD
Marko treba krenuti 3 minute i 20 sekundi prije Roka. 1 BOD
…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Za polovinu puta treba napraviti 800 koraka. 1 BOD

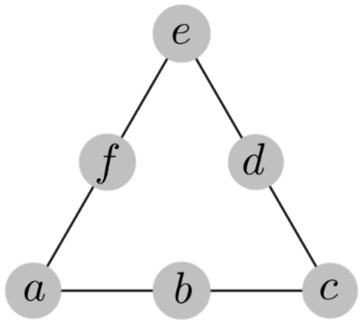
	Roko prijeđe	Marko prijeđe	ukupno prijeđu
za 1 minutu	80 koraka	60 koraka	140 koraka
za 2 minute	160 koraka	120 koraka	280 koraka
za 3 minute	240 koraka	180 koraka	420 koraka
za 4 minute	320 koraka	240 koraka	560 koraka
za 5 minuta	400 koraka	300 koraka	700 koraka
za 6 minuta	480 koraka	360 koraka	840 koraka
za 7 minuta	560 koraka	420 koraka	980 koraka
za 8 minuta	640 koraka	480 koraka	1020 koraka
za 9 minuta	720 koraka	540 koraka	1 260 koraka
za 10 minuta	800 koraka	600 koraka	1 400 koraka

2 BODA

(**Napomena:** 2 BODA dodjeljuju se i ako učenik, ne raspisujući sve korake, dođe do istog zaključka približavanjem.)

Za 10 minuta Roko bi prešao polovinu puta. Marko mora prijeći još 200 koraka. 1 BOD
Marko treba ranije krenuti. 1 BOD
Za 1 minutu Marko prijeđe 60 koraka pa za 3 minute prijeđe 180 koraka. 1 BOD
Budući da 60 koraka prijeđe za 60 sekundi,
preostalih će 20 koraka prijeći za 20 sekundi. 2 BODA
Dakle, Marko treba krenuti 180 + 20 = 200 sekundi prije Roka. 1 BOD
Marko treba krenuti 3 minute i 20 sekundi prije Roka. 1 BOD
……………………..………………………………………………….….... UKUPNO 10 BODOVA

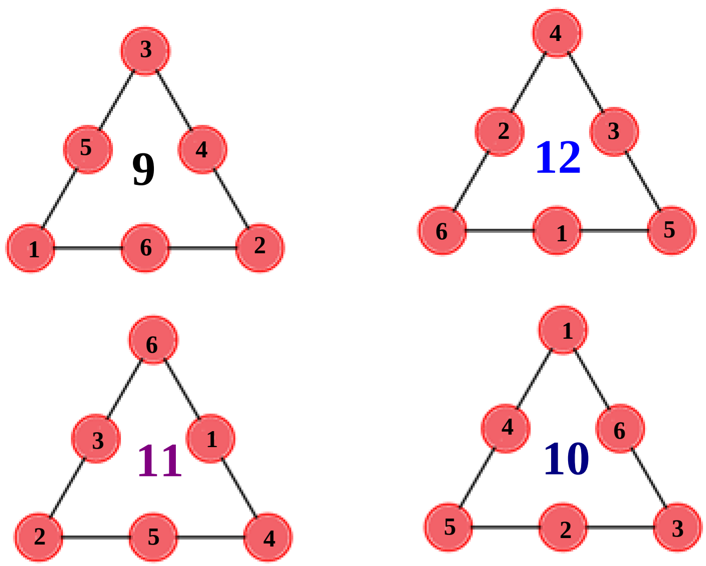
5. Slova u krugovima na slici treba zamijeniti brojevima 1, 2, 3, 4, 5 i 6 tako da vrijedi $a + b + c = c + d + e = a + f + e$. Svi brojevi moraju biti upotrijebljeni i ne smiju se ponavljati. Koliki može biti zbroj $a + b + c$? Za svaki mogući zbroj prikaži slikom jedan odgovarajući raspored brojeva.



Rješenje.

Zbroj svih zadanih brojeva je 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21.
Iz $a + b + c = c + d + e = a + f + e$ zaključujemo da je
$(a + b + c) + (c + d + e) + (a + f + e) = 3 \cdot (a + b + c)$. 1 BOD
U zbroju s lijeve strane brojevi a, c i e se kao pribrojnici pojavljuju dvaput (to su brojevi na vrhovima trokuta.
Zato je $3 \cdot (a + b + c) = (a + b + c + d + e + f) + (a + c + e)$,
Odnosno, $3 \cdot (a + b + c) = 21 + (a + c + e)$, 1 BOD
Zbroj brojeva na vrhovima $a + c + e$ može biti najmanje 1 + 2 + 3 = 6, a najviše 4 + 5 + 6 =15.
1 BOD
Iz $3 \cdot (a + b + c) = 21 + 6 = 27$ slijedi da je najmanji zbroj $a + b + c = 9$,
dok iz $3 \cdot (a + b + c) = 21 + 15 = 36$ slijedi da je najmanji zbroj $a + b + c = 12$.
Dakle, zbroj $a + b + c$ ne može biti manji od 9 ni veći od 12. 1 BOD

Za zbroj $a + b + c$ postoje 4 različita rješenja (4 različita zbroja). To su 9, 10, 11 i 12. 2 BODA



4 BODA
…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik ne ispituje postoje li druga rješenja osim ova 4, ne može dobiti sve bodove.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. ožujka 2021.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Umetni jedne ili više zagrada tako da vrijednost izraza $5 \cdot 12 + 6 : 3 - 1$ bude
a) 21 b) 25 c) 33 d) 63.
Računom provjeri točnost svakog dobivenog rješenja.

Rješenje.

a) $(5 \cdot 12 + 6) : 3 - 1$ 1 BOD
$= (60 + 6) : 3 - 1$
$= 66 : 3 - 1$
$= 22 - 1 = 21$ 1 BOD

b) $5 \cdot ((12 + 6) : 3 - 1)$ 2 BODA
$= 5 \cdot (18 : 3 - 1)$
$= 5 \cdot (6 - 1)$
$= 5 \cdot 5 = 25$ 1 BOD

c) $(5 \cdot 12 + 6) : (3 - 1)$ 2 BODA
$= (60 + 6) : 2$
$= 66 : 2 = 33$ 1 BOD

d) $5 \cdot 12 + 6 : (3 - 1)$ 1 BOD
$= 5 \cdot 12 + 6 : 2$
$= 60 + 3 = 63$ 1 BOD

…………………………..…………………………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: S obzirom da se radi o malim brojevima i mogućnosti računanja napamet, za potpune bodove dovoljno je napisati izraz s točno umetnutim zagradama i jedan od međukoraka računanja.

2. Umnožak dva prirodna broja iznosi 2 538. Ako se jedan od tih brojeva umanji za 6, a drugi ostane isti, tada je njihov je umnožak 2 214. Koji su to brojevi?

Rješenje.

Prvi način:

Označimo tražene prirodne brojeve s x i y. Vrijedi $x \cdot y = 2\,538$.	1 BOD
Umanjimo li broj x za 6, novi broj ima vrijednost $x - 6$.	1 BOD
Vrijedi $(x - 6) \cdot y = 2\,214$.	1 BOD
To se može napisati kao $x \cdot y - 6 \cdot y = 2\,214$.	1 BOD
Koristeći poznatu vrijednost umnoška $x \cdot y$ dobije se $2\,538 - 6y = 2\,214$,	1 BOD
odnosno $6y = 2\,538 - 2\,214 = 324$,	1 BOD
pa slijedi $y = 324 : 6 = 54$.	2 BODA
Onda je $x = 2\,538 : 54 = 47$.	2 BODA

………………………...……………………………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Označimo tražene prirodne brojeve s x i y. Vrijedi $x \cdot y = 2\,538$.	1 BOD
Umanjimo li broj x za 6, novi broj ima vrijednost $x - 6$.	1 BOD
Sada vrijedi $(x - 6) \cdot y = 2\,214$.	1 BOD
Umnoške ćemo rastaviti na proste faktore:	
$2\,538 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 47$ i $2\,214 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 41$.	2 BODA
Brojevi koji se razlikuju za 6 su 47 i 41,	2 BODA
znači, $x = 47$.	1 BOD
Onda je $y = 2\,538 : 47 = 54$ (ili $y = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$).	2 BODA

………………………...……………………………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Dvije znamenke čiji je umnožak 8 i jedna od njih veća od 6 su:

1 i 8, 4 i 7, 2 i 9 te 6 i 8.	2 BODA
Ako veću znamenku umanjimo za 6, dobit ćemo parove: 1 i 2, 4 i 1, 2 i 3 te 6 i 2.	1 BOD
Računanjem njihovih umnožaka ($1 \cdot 2 = 2$, $\mathbf{4 \cdot 1 = 4}$, $2 \cdot 3 = 6$, $6 \cdot 2 = 12$) nalazimo da je traženi par znamenaka 4 i 7.	1 BOD
Traženi brojevi završavaju znamenkama 4 i 7.	1 BOD

Kako broj 2 538 nije djeljiv ni s 4 ni sa 7, zaključujemo da niti jedan od faktora ne može biti jednoznamenkasti broj.

Množimo dvoznamenkaste brojeve koji završavaju znamenkama 4 i 7:

$24 \cdot 97 = 2328 < 2538$	$34 \cdot 87 = 2958 > 2538$	
$34 \cdot 77 = 2618 > 2538$	$34 \cdot 67 = 2278 < 2538$	
$44 \cdot 57 = 2508 < 2538$	$\mathbf{54 \cdot 47 = 2538}$	2 BODA

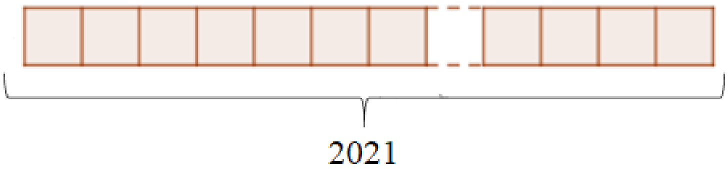
Provjeravamo umnožak brojeva 54 i 41.	1 BOD
$54 \cdot 41 = 2214$	1 BOD
To su brojevi 54 i 47.	1 BOD

………………………...……………………………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Učenici moraju imati 2 ili 3 umnoška kojima procjenjuju o kojim se faktorima radi ako rade približno ovim načinom.

Napomena 2: Ako učenik pogodi brojeve, bez ikakvih objašnjenja, ali su vidljiva oba umnoška, može dobiti 3 BODA (2 za umnoške i 1 za odgovor).

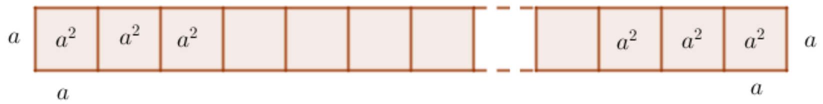
3. Pravokutnik je sastavljen od 2 021 sukladnih kvadrata, kao na slici.



Odredi opseg tog pravokutnika ako je njegova površina 18 189 cm^2.

Rješenje.

Pravokutnik je sastavljen od 2021 sukladnih kvadrata (sa stranicom duljine a),



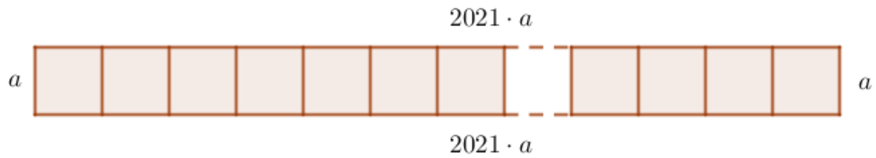
(skica) 1 BOD

pa je njegova površina $P = 2\,021a^2$. 2 BODA

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\,021a^2 \\ P &= 18\,189 \text{ cm}^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a^2 = 9 \text{ cm}^2$$ 2 BODA

$\Rightarrow a = 3$ cm 1 BOD

Opseg pravokutnika je zbroj duljina njegovih stranica.



Dvije stranice pravokutnika imaju duljinu a, a preostale dvije $2\,021a$. 1 BOD

Opseg dobivenog pravokutnika računamo kao

$o = a + a + 2\,021a + 2\,021a = 4\,044a$. 2 BODA

Nakon uvrštavanja duljine stranice $a = 3$ cm, dobije se

$o = 4\,044 \cdot 3$ cm $= 12\,132$ cm. 1 BOD

…………………………...…………………………………………...……... UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ako učenik pogrešno odredi duljinu stranice kvadrata iz površine, a dalje opseg računa točno, treba mu oduzeti 2 BODA.

4. Na dužini $\overline{AB}$ duljine 80 cm istaknute su redom točke C, D i E tako da je točka C najbliža točki A. Udaljenost između polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ iznosi 23 cm. Koliko su centimetara udaljena polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$?

Rješenje.

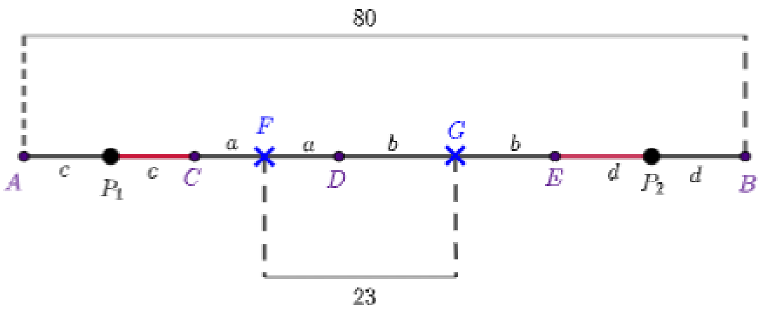
Na dužini $\overline{AB}$ istaknimo polovišta F i G dužina $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$ te označimo jednake duljine dužina $\overline{CF}$ i $\overline{FD}$, te jednake duljine dužina $\overline{DG}$ i $\overline{GE}$:

$a = |CF| = |FD|$ i $b = |DG| = |GE|$. 1 BOD

Označimo i duljine dužina iz uvjeta zadatka. 1 BOD

Na dužini $\overline{AB}$ istaknimo polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ (npr. redom P_1 i P_2), 1 BOD

te označimo jednake duljine dužina $\overline{AP_1}$ i $\overline{P_1C}$ i jednake duljine dužina $\overline{EP_2}$ i $\overline{P_2B}$.

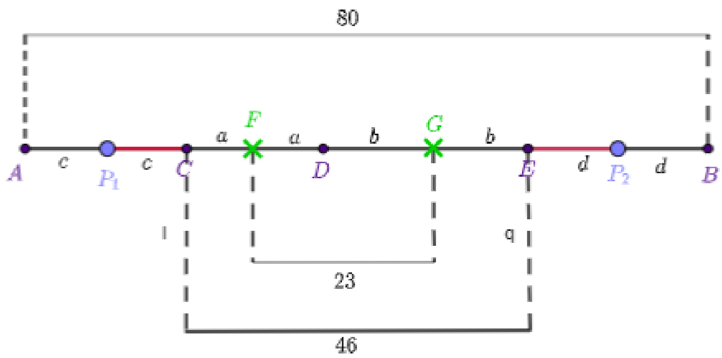


(skica) 1 BOD

Potrebno je odrediti udaljenost točaka P_1 i P_2, tj. $c + 2a + 2b + d$. 1 BOD

Kako je $|FG| = a + b = 23$ cm,

slijedi da je $|CE| = 2a + 2b = 2(a + b) = 46$ cm.



(račun ili dopunjena skica) 1 BOD

Razlika 80 cm − 46 cm = 34 cm odgovara zbroju duljina dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$, 1 BOD

tj. $2c + 2d = 34$ cm, 1 BOD

iz čega slijedi $c + d = 17$ cm. 1 BOD

Konačno, možemo izračunati traženu duljinu:

$|P_1P_2| = c + 2a + 2b + d$,

$|P_1P_2| = (c + d) + (2a + 2b) = 17\text{ cm} + 46\text{ cm} = 63\text{ cm}.$ 1 BOD

……………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

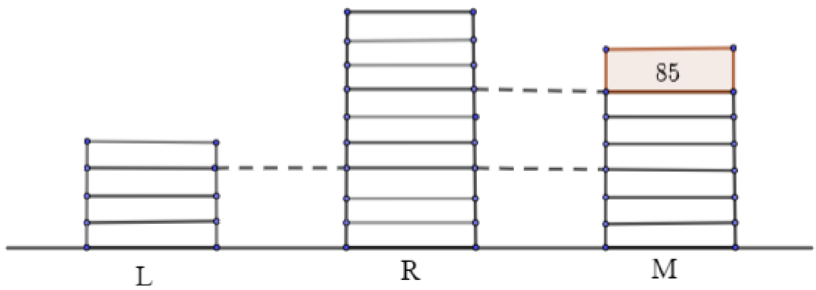
Napomena: Udaljenost polovišta dužina $\overline{AC}$ i $\overline{EB}$ može se izračunati i kao:

$|P_1P_2| = |AB| - (c + d) = 80\text{ cm} - 17\text{ cm} = 63\text{ cm}.$

5. Lorna, Rita i Mirna zajedno su uštedjele 750 kn. Znamo da je Rita uštedjela tri puta više od tri četvrtine Lorninog iznosa, a Mirnina je ušteđevina za 85 kn veća od dvije trećine Ritine ušteđevine. Koliko je uštedjela svaka od njih?

Rješenje.

Iznos koji je uštedjela Lorna prikažimo stupcem.
S obzirom da je Rita uštedjela tri puta više od tri četvrtine Lorninog iznosa, Lornin iznos podijelit ćemo na 4 jednaka dijela kako bismo dobili četvrtine.
Jedan taj dio predstavlja x kuna. 1 BOD
Ritin iznos prikazat ćemo kao stupac koji je 3 puta viši od tri četvrtine Lorninog, odnosno $9x$ kuna.
1 BOD
Mirnin iznos prikazat ćemo kao stupac koji je jednak dvije trećine stupca koji predstavlja Ritin iznos ($6x$ kuna) i nadodati mu 85 kn. 1 BOD



Lorna ima $4x$ kuna, Rita ima $9x$ kuna, a Mirna ima $(6x + 85)$ kuna.
Vrijedi $4x + 9x + (6x + 85) = 750$. 1 BOD
Pojednostavimo li jednadžbu dobije se $19x + 85 = 750$, 1 BOD
a daljnjim rješavanjem $19x = 665$, 1 BOD
iz čega slijedi $x = 35$. 1 BOD
Lorna ima $4 \cdot 35$ kuna, tj. 140 kn, 1 BOD
Rita ima $9 \cdot 35$ kuna, tj. 315 kn, 1 BOD
a Mirna ima $(6 \cdot 35 + 85)$ kuna, tj. 295 kn. 1 BOD
………………………..……………………………………………..…..... UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. ožujka 2021.

6. razred – rješenja

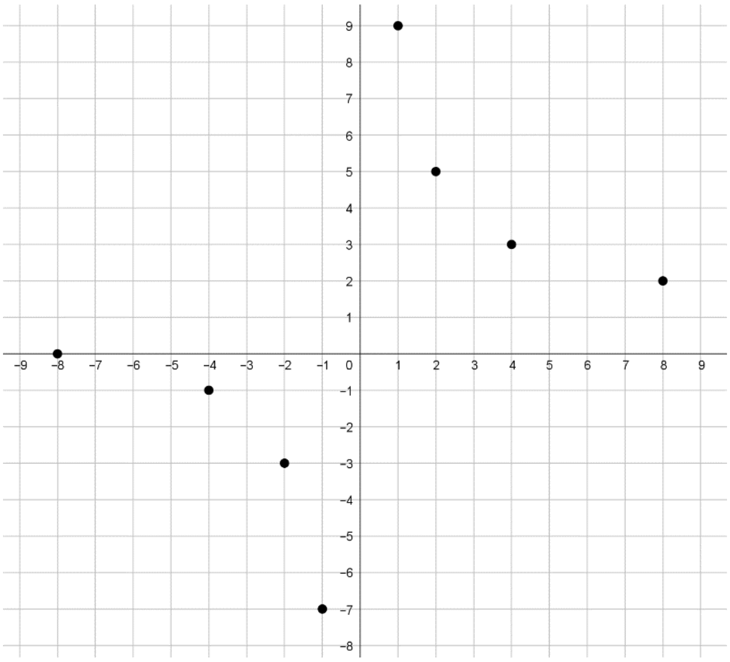
OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Odredi sve točke s cjelobrojnim koordinatama (x, y) za koje vrijedi $x \cdot (y - 1) = 8$. Točke nacrtaj u koordinatnom sustavu u ravnini.

Rješenje.

Umnožak 8 je moguće dobiti kao:
$1 \cdot 8$, $-1 \cdot (-8)$, $8 \cdot 1$, $-8 \cdot (-1)$, $2 \cdot 4$, $-2 \cdot (-4)$, $4 \cdot 2$ i $-4 \cdot (-2)$.
Ako je $x \cdot (y - 1) = 1 \cdot 8$, tada je $x = 1$, a $y - 1 = 8$, odnosno $y = 9$.
Koordinate točke su $(1, 9)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = -1 \cdot (-8)$, tada je $x = -1$, a $y - 1 = -8$, odnosno $y = -7$.
Koordinate točke su $(-1, -7)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = 8 \cdot 1$, tada je $x = 8$, a $y - 1 = 1$, odnosno $y = 2$.
Koordinate točke su $(8, 2)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = -8 \cdot (-1)$, tada je $x = -8$, a $y - 1 = -1$, odnosno $y = 0$.
Koordinate točke su $(-8, 0)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = 2 \cdot 4$, tada je $x = 2$, a $y - 1 = 4$, odnosno $y = 5$.
Koordinate točke su $(2, 5)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = -2 \cdot (-4)$, tada je $x = -2$, a $y - 1 = -4$, odnosno $y = -3$.
Koordinate točke su $(-2, -3)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = 4 \cdot 2$, tada je $x = 4$, a $y - 1 = 2$, odnosno $y = 3$.
Koordinate točke su $(4, 3)$. 1 BOD
Ako je $x \cdot (y - 1) = -4 \cdot (-2)$, tada je $x = -4$, a $y - 1 = -2$, odnosno $y = -1$.
Koordinate točke su $(-4, -1)$. 1 BOD

Slika: 2 BODA



Napomena:
Crtež se boduje s 2 BODA samo ako je točno nacrtano svih 8 točaka.

Ako su jedna ili dvije točke pogrešno nacrtane, bodovati s 1 BODOM.

Pet ili manje točno nacrtanih točaka bodovati s 0 BODOVA.

……………………………………………………………………………..….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. U četverokutu $ABCD$ vrijedi da je veličina kuta β trostruko veća od veličine kuta α, veličina kuta γ dvostruko veća od veličine kuta β, a veličina kuta δ je višekratnik kuta od 60º. Izračunaj veličine kutova tog četverokuta.

Rješenje.

$\beta = 3\alpha$ 1 BOD
$\gamma = 2\beta = 6\alpha$ 1 BOD
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$ 1 BOD
$\alpha + 3\alpha + 6\alpha + \delta = 360^\circ$
$10\alpha + \delta = 360^\circ$ 1 BOD

Za $\delta = 60^\circ$ je:
$10\alpha = 300^\circ$
$\alpha = 30^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 180^\circ$ 1 BOD
Ovo nije rješenje jer unutarnji kut ne može biti ispruženi kut. 1 BOD

Za $\delta = 120^\circ$ je:
$10\alpha = 240^\circ$
$\alpha = 24^\circ$, $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 144^\circ$ 1 BOD

Za $\delta = 180^\circ$ nema rješenja jer unutarnji kut ne može biti ispruženi kut. 1 BOD

Za $\delta = 240^\circ$ je:
$10\alpha = 120^\circ$
$\alpha = 12^\circ$, $\beta = 36^\circ$, $\gamma = 72^\circ$ 1 BOD

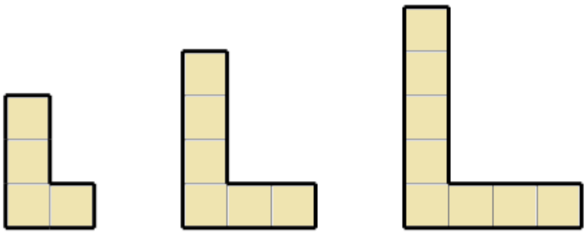
Za $\delta = 300^\circ$ je:
$10\alpha = 60^\circ$
$\alpha = 6^\circ$, $\beta = 18^\circ$, $\gamma = 36^\circ$ 1 BOD
……………………………………………………………………….……... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neki je vinogradar unajmio radnika da mu 12 sati bere grožđe za plaću od 340 kn i 20 kg grožđa. Radnik je morao otići dva sata ranije pa mu je, uz 20 kg grožđa, isplaćeno samo 270 kn. Koliko iznosi cijena jednog kilograma grožđa?

Rješenje.

Radnik je radio 2 sata manje i zbog toga je dobio 70 kn manje od dogovorenog.
To znači da je njegova naknada 70 : 2 = 35 kn po satu. 3 BODA
Po toj bi satnici za svojih 10 sati rada trebao dobiti $35 \cdot 10 = 350$ kn. 2 BODA
Kako je on dobio 270 kn i 20 kg grožđa,
vidi se da 20 kg grožđa ima vrijednost 350 – 270 = 80 kn. 3 BODA
Cijena kilograma grožđa je 80 : 20 = 4 kune. 2 BODA
……………………………………………………………….………..……. UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je niz likova u obliku slova L koji su sastavljeni od sukladnih kvadrata. Prva tri člana niza prikazana su na slici.



Izračunaj površinu 2021. lika u nizu ako je njegov opseg jednak 40 450 cm.

Rješenje.

Iz zadana prva tri člana niza možemo zaključiti da svaki idući lik ima točno dva kvadratića više, jedan se dodaje na vrh, a jedan na dnu desno.

Prvi način:
Da bismo odredili formulu za računanje opsega traženog lika, treba uočiti da je u svakom liku broj stranica kvadrata isti s donje i gornje strane, odnosno s lijeve i desne strane.

Označimo s a duljinu stranice kvadrata. Tada su opsezi prva tri člana niza (prva tri lika):
$o_1 = (2a + 3a) \cdot 2 = 10a$
$o_2 = (3a + 4a) \cdot 2 = 14a$
$o_3 = (4a + 5a) \cdot 2 = 18a$ 1 BOD

Opseg 2021. lika u nizu možemo izračunati kao
$o_{2021} = (2\ 022a + 2\ 023a) \cdot 2 = 4\ 045a \cdot 2 = 8\ 090a.$ 2 BODA

Iz $o_{2021} = 40\ 450$ cm slijedi:
$8\ 090a = 40\ 450$ cm
$a = (40\ 450 : 8\ 090)$ cm $= 5$ cm
Duljina stranice kvadrata iznosi 5 cm. 2 BODA

Da bismo izračunali površinu traženog lika, trebamo uočiti da se svaki lik sastoji od određenog broja kvadrata u donjem redu i isto toliko kvadrata iznad prvog kvadrata iz donjeg reda.

Označimo s n_k broj kvadrata u k-tom liku. Tada je:
$n_1 = 2 \cdot 2 = 4$
$n_2 = 3 \cdot 2 = 6$
$n_3 = 4 \cdot 2 = 8$
…
$n_{2021} = 2\ 022 \cdot 2 = 4\ 044.$ 2 BODA

Površina jednog kvadrata je
$P = a \cdot a = 5 \cdot 5 = 25$ cm^2, 1 BOD
pa je površina 2021. lika u nizu jednaka
$P_{2021} = n_{2021} \cdot P = 4\ 044 \cdot 25$ cm$^2 = 101\ 100$ cm^2.
Površina 2021. lika iznosi 101 100 cm^2. 2 BODA
…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Označimo s a duljinu stranice kvadrata.
Površina i opseg likova u nizu prikažimo tablicom:

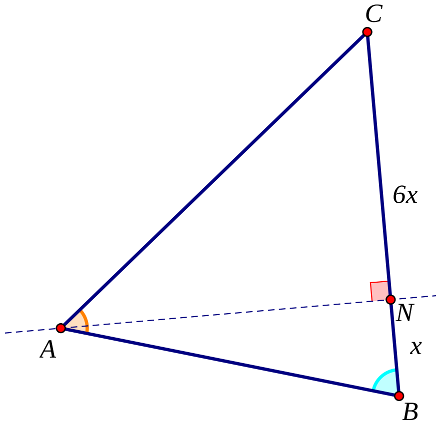
Redni broj lika u nizu **n**	Broj kvadrata u liku **k**	Površina lika **P**	Opseg lika **o**
1	$4 = 2 \cdot 2$	$4a^2$	$10a = 5 \cdot 2a$
2	$6 = 3 \cdot 2$	$6a^2$	$14a = 7 \cdot 2a$
3	$8 = 4 \cdot 2$	$8a^2$	$18a = 9 \cdot 2a$
	1 BOD		1 BOD
...	…	…	…
n	$(n + 1) \cdot 2$	$2(n + 1)a^2$	$(2n + 3) \cdot 2a$
	2 BODA		2 BODA

Računamo opseg 2021. lika u nizu:
$o_n = (2n + 3) \cdot 2a$
$o_{2021} = (2 \cdot 2\ 021 + 3) \cdot 2a$
$o_{2021} = 8\ 090a$
$o_{2021} = 40\ 450$ cm
$a = 5$ cm 2 BODA

Površina 2021. lika u nizu je:
$P_n = 2(n + 1) \cdot a^2$
$P_{2021} = 2 \cdot (2\ 021 + 1) \cdot a^2$
$P_{2021} = 4\ 044a^2$
$P_{2021} = 101\ 100\ \text{cm}^2$ 2 BODA
…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Zadan je trokut ΔABC takav da je $|\angle BAC| + |\angle CBA| = 135°$. Točka N je nožište visine iz vrha A za koju vrijedi $|NC| = 6 \cdot |NB|$. Izračunaj duljinu stranice $\overline{BC}$ ako površina trokuta ΔABC iznosi 3 024 mm^2.

Rješenje.



Skica: 1 BOD

$|\angle BAC| + |\angle CBA| = 135°$

$|\angle BAC| + |\angle CBA| + |\angle ACB| = 180°$ 1 BOD

$|\angle ACB| = 45°$ 1 BOD

Dužina $\overline{AN}$ je visina na stranicu $\overline{BC}$, pa je $|\angle CNA| = 90°$.

Slijedi da je $|\angle NAC| = 45°$ i $|AN| = |NC|$. 1 BOD

Neka je $|NB| = x$.

Iz $|NC| = 6 \cdot |NB|$ slijedi da je $|AN| = |NC| = 6x$, $|BC| = 7x$. 1 BOD

Površina trokuta ΔABC je:

$P = \dfrac{7x \cdot 6x}{2}$, odnosno $P = (7x \cdot 6x) : 2$. 1 BOD

$(7x \cdot 6x) : 2 = 3\ 024$

$42x \cdot x = 6\ 048$ ili $21x \cdot x = 3\ 024$ 1 BOD

$x \cdot x = 144$ ili $x^2 = 144$ 1 BOD

$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) = 12 \cdot 12$

$x = 12$ 1 BOD

$|BC| = 7x = 84$

Duljina stranice $\overline{BC}$ iznosi 84 mm. 1 BOD

………………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. ožujka 2021.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U tvornici lutaka dvije su vrste strojeva, novi i stari. Četiri nova stroja, kao i pet starih strojeva, može proizvesti po 480 lutaka na dan. Izračunaj koliko će lutaka na dan proizvesti devet novih strojeva i jedanaest starih strojeva zajedno.

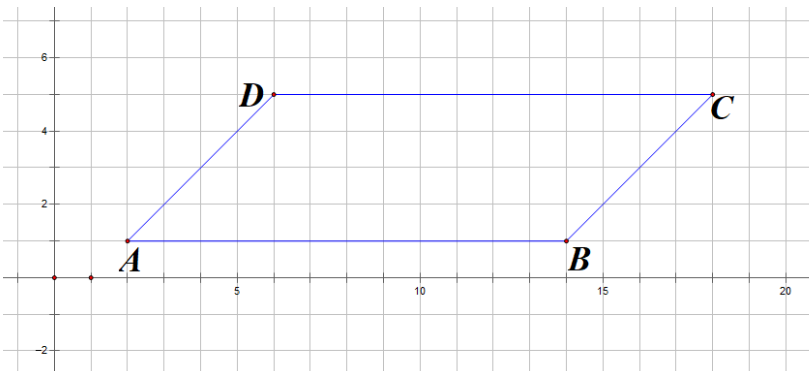
Rješenje.

Novi i stari strojevi ne proizvode lutke istom brzinom.
U jednom danu 4 nova stroja mogu proizvesti 480 lutaka.
Jedan novi stroj može proizvesti $480 : 4 = 120$ lutaka u jednom danu. 2 BODA
9 novih strojeva može proizvesti $120 \cdot 9 = 1\,080$ lutaka u jednom danu. 2 BODA
5 starih strojeva može proizvesti 480 lutaka u jednom danu.
Jedan stari stroj može proizvesti $480 : 5 = 96$ lutaka u jednom danu. 2 BODA
11 starih strojeva može proizvesti $96 \cdot 11 = 1\,056$ lutaka u jednom danu. 2 BODA
Stoga, 9 novih strojeva i 11 starih strojeva zajedno može proizvesti $1\,080 + 1\,056 = 2\,136$ lutaka u jednom danu. 2 BODA
…………………………………………………………………………..….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Tri vrha paralelograma *ABCD* zadana su svojim koordinatama $A(2, 1)$, $B(14, 1)$, $D(6, 5)$. Točka *P* pripada polupravcu *AB*, a točka *S* pripada polupravcu *AD*. Duljine stranica paralelograma *APRS* su za 25 % veće od duljina odgovarajućih stranica paralelograma *ABCD*. Odredi nepoznate koordinate vrhova paralelograma *APRS*. Za koliko posto je površina paralelograma *APRS* veća od površine paralelograma *ABCD*?

Rješenje.

Nacrtan paralelogram *ABCD* u koordinatnom sustavu. 1 BOD

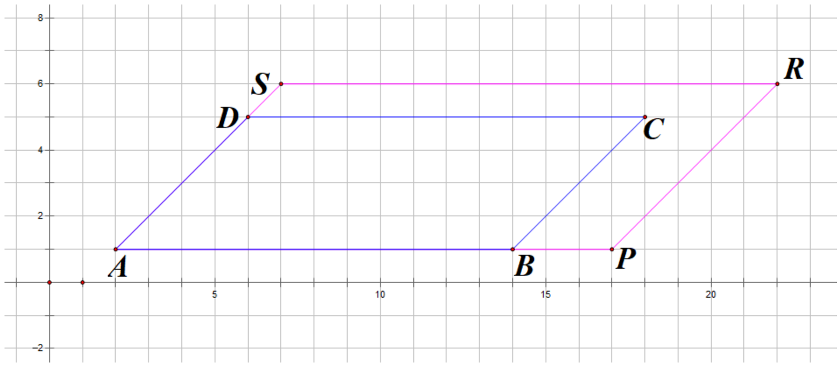


(Vrh *C* ima koordinate $C(18, 5)$.)
Površina paralelograma *ABCD* jednaka je umnošku duljine stranice i duljine njoj pripadajuće visine.
$P_{ABCD} = 12 \cdot 4 = 48$ (kvadratnih jedinica). 1 BOD

$$25\,\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

Duljine stranica paralelograma *APRS* su za $\frac{1}{4}$ duljine veće od duljina odgovarajućih stranica paralelograma *ABCD*. 1 BOD

Nacrtan paralelogram *APRS* u istom koordinatnom sustavu. 1 BOD



Koordinate vrhova su $P(17, 1)$, $R(22, 6)$, $S(7, 6)$. 3 BODA

$P_{APRS} = 15 \cdot 5 = 75$ (kvadratnih jedinica). 1 BOD

$75 - 48 = 27$ 1 BOD

$p = \frac{27}{48} \cdot 100\ \% = 56.25\ \%$ 1 BOD

Površina paralelograma *APRS* je za 56.25 % veća od površine paralelograma *ABCD*. 1 BOD

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena 1: Posljednja tri koraka (za zadnja 3 BODA) učenik može izračunati na više različitih načina, npr. 75 : 48 = 1.5625, pa je $p = 56.25$ %.

Napomena 2: Posljednja četiri koraka (za zadnja 4 BODA) učenik može ostvariti i na sljedeći način: Ako su duljine stranica paralelograma *APRS* za 25 % veće od duljina stranica paralelograma *ABCD*, onda je duljina odgovarajuće stranice paralelograma *APRS* 1.25 puta veća od duljine stranice paralelograma *ABCD*. 1 BOD

Tada je površina paralelograma *APSR* veća od površine paralelograma *ABCD* 1.25^2 puta. 1 BOD

$1.25^2 = 1.5625$ 1 BOD

Površina paralelograma *APRS* je za 56.25 % veća od površine paralelograma *ABCD*. 1 BOD

3. Maja ide u školu za slastičare. Dobila je zadatak izraditi 400 ml soka u kojem je 75 % čistog jabučnog soka. Na raspolaganju ima sok sa 85 % udjelom i 60 % udjelom čistog jabučnog soka. Kako će to napraviti?

Rješenje.

Maja treba dobiti 400 ml soka s udjelom 75 % čistog jabučnog soka.

Neka je x potrebna količina soka (u mililitrima) s udjelom 85 % čistog jabučnog soka. 1 BOD

Onda je $400 - x$ potrebna količina soka (u mililitrima) s udjelom 60 % čistog jabučnog soka. 1 BOD

Tada je:

$0.85 \cdot x + 0.60 \cdot (400 - x) = 0.75 \cdot 400$ 3 BODA

$85x + 24\,000 - 60x = 400 \cdot 75$ 2 BODA

$25x = 30\,000 - 24\,000$ 1 BOD

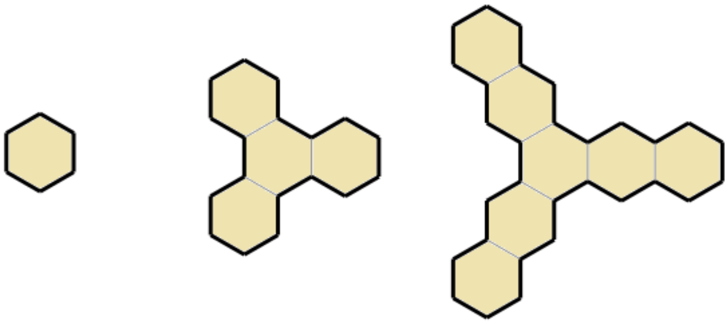
$25x = 6\,000$

$x = 240$ 1 BOD

Da bi dobila 400 ml soka u kojem je 75 % čistog jabučnog soka, Maja treba uzeti 240 ml soka s udjelom 85 % čistog jabučnog soka i 400 – 240 = 160 ml soka s udjelom 60 % čistog jabučnog soka. 1 BOD

……………………………………………………………….………..……. UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je niz likova koji su sastavljeni od sukladnih pravilnih šesterokuta. (Pravilni šesterokut je šesterokut kojem su sve stranice jednake duljine i svi unutarnji kutovi jednake veličine.) Prva tri člana niza prikazana su na slici.



Ako bismo nastavili sastavljati likove na isti način, odredi:
a) Može li neki lik u nizu biti sastavljen od 2021 pravilnog šesterokuta?
b) Koliko iznosi opseg 2021. lika u nizu, ako je opseg pravilnog šesterokuta 30 cm?

Rješenje.

Iz zadana prva tri člana niza možemo zaključiti da svaki idući lik ima točno tri pravilna šesterokuta više. Također, Opseg svakog idućeg lika veći je za duljinu dodanih stranica. Svakim novim pravilnim šesterokutom dodajemo po 4 nove stranice.

Broj pravilnih šesterokuta unutar jednog lika i opseg likova u nizu dani su u tablici:

Redni broj lika u nizu ***n***	Broj pravilnih šesterokuta u liku ***k***	Opseg lika ***o***
1	$1=1+3\cdot 0$	$6a=1\cdot 6a$
2	$4=1+3\cdot 1$	$6a+3\cdot 4a=18a=3\cdot 6a$
3	$7=1+3\cdot 2$	$6a+6\cdot 4a=30a=5\cdot 6a$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$1+3\cdot(n-1)=3n-2$	$(2n-1)\cdot 6a$

- Izraz za broj pravilnih šesterokuta u liku: 3 BODA
- Izraz za opseg lika: 3 BODA

a) Ako bi bio lik u nizu izgrađen od 2 021 šesterokuta, onda bi vrijedilo:

$3n-2=2021$

$\Rightarrow 3n=2\,023$

$\Rightarrow n=\dfrac{2\,023}{3}$

Kako broj 2 023 nije djeljiv brojem 3, broj n nije prirodan broj pa takav lik ne postoji. 2 BODA

b) Opseg šesterokuta je $o_6=6a=30\text{ cm},$ pa je opseg 2021. lika u nizu:

$o_n=(2n-1)\cdot 6a$

$o_{2021}=(2\cdot 2\,021-1)\cdot 30$

$o_{2021}=121\,230\text{ cm}$ 2 BODA

…………………………………………………………………….……..…… UKUPNO 10 BODOVA

5. U salonu namještaja prodaju se radni stolovi s jednom, s dvije i s tri ladice. Ukupno je 25 ladica u svim stolovima zajedno, a stolova s jednom ladicom ima koliko i stolova s dvije i tri ladice zajedno. Odredi koliko može biti kojih stolova.

Rješenje.

Prvi način:
Neka je a broj stolova s jednom ladicom, b broj stolova s dvije ladice i c broj stolova s tri ladice.
Tada vrijedi:
$a+2b+3c=25$
$a=b+c$ 2 BODA
$a,b,c\in\mathbb{N}$
Sređivanjem se dobiva izraz $3b+4c=25$. 2 BODA

$b,\ b\le 8$	$4c=25-3b$	$c\in\mathbb{N}$	$a=b+c$	Rješenje (a,b,c)
1	22	-	-	
2	19	-	-	
3	16	4	7	(7, 3, 4)
4	13	-	-	
5	10	-	-	
6	7	-	-	
7	4	1	8	
8	1	-	-	(8, 7, 1)
2 BODA		2 BODA		2 BODA

Može biti: 7 stolova s jednom ladicom, 3 stola s dvije ladice i 4 stola s tri ladice
ili: 8 stolova s jednom ladicom, 7 stolova s dvije ladice i 1 stol s tri ladice.
…………………………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Neka je x broj stolova s jednom ladicom, y broj stolova s dvije ladice i $x-y$ broj stolova s tri ladice.
1 BOD
Tada vrijedi:
$x\cdot 1+y\cdot 2+(x-y)\cdot 3=25$, 1 BOD
odnosno $4x-y=25$, 1 BOD
pa je $y=4x-25,\quad x,y\in\mathbb{N}$. 1 BOD
$4x$ mora biti veći od 25 i $4x-25<x$, pa slijedi $x\in\{7,8\}$. 2 BODA

x	$y=4x-25$	$x-y$	Rješenje $(x,y,x-y)$
7	3	4	(7, 3, 4)
8	7	1	(8, 7, 1)
	2 BODA		2 BODA

Može biti: 7 stolova s jednom ladicom, 3 stola s dvije ladice i 4 stola s tri ladice
ili: 8 stolova s jednom ladicom, 7 stolova s dvije ladice i 1 stol s tri ladice.
…………………………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
29. ožujka 2021.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Sanja i Ana skupljaju kovanice od 2 kune i 5 kuna, svaka u svojoj kasici. Nakon godinu dana otvorile su kasice i prebrojale kovanice. Zajedno su sakupile 280 kovanica po 2 kune. U Sanjinoj kasici 60 % svih kovanica čine kovanice od 2 kune, a u Aninoj je kasici dvostruko više kovanica od 2 kune nego onih od 5 kuna. Ukupna vrijednost novca iz obje kasice je 1 360 kuna. Kolika je vrijednost novca iz Sanjine, a kolika iz Anine kasice?

Rješenje.

Neka je
a broj kovanica od 2 kn u Sanjinoj kasici,
b broj kovanica od 5 kn u Sanjinoj kasici,
c broj kovanica od 2 kn u Aninoj kasici,
d broj kovanica od 5 kn u Aninoj kasici.

Vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a+c=280 \\ 0.6(a+b)=a \\ c=2d \end{array}\right\}$$ 1 BOD

$2(a + c) + 5(b + d) = 1360$ 1 BOD

Iz prve dvije jednadžbe slijedi

$c = 280 - a$ i $b = \frac{2}{3}a$, 1 BOD

a iz treće i druge jednadžbe

$d = \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(280 - a) = 140 - \frac{1}{2}a.$ 1 BOD

Uvrštavanjem u posljednju jednadžbu dobijemo

$2 \cdot 280 + 5 \cdot (\frac{2}{3}a + 140 - \frac{1}{2}a) = 1\,360$ 1 BOD

$5 \cdot (\frac{2}{3}a + 140 - \frac{1}{2}a) = 800$

$\frac{2}{3}a + 140 - \frac{1}{2}a = 160$ 1 BOD

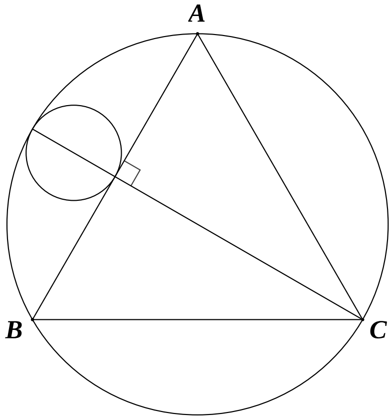
$a = 120$ 1 BOD

Nadalje je

$$\left.\begin{array}{l} c=280-120=160 \\ b=80 \\ d=80. \end{array}\right\}$$ 1 BOD

Vrijednost Sanjina novca je $2a + 5b = 640$ kn. 1 BOD
Vrijednost Anina novca je $2c + 5d = 720$ kn**.** 1 BOD
…………………………………………………………………..….…. UKUPNO 10 BODOVA

2. Jednakostraničnom trokutu ΔABC opisana je kružnica. Manja kružnica dodiruje veću kružnicu iznutra i stranicu $\overline{AB}$ trokuta ΔABC kao na slici. Koliki je omjer površina manjeg i većeg kruga omeđenih tim kružnicama?

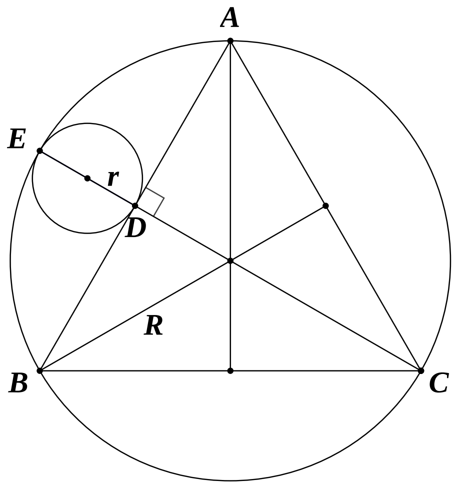


Rješenje.

Označimo s a duljinu stranice jednakostraničnog trokuta.

Nadalje, označimo s r duljinu polumjera manje kružnice, a s R duljinu polumjera veće kružnice.

U jednakostraničnom trokutu sjecište visina i sjecište težišnica nalaze se u istoj točki.



Duljinu visine računamo kao $v=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 1 BOD

Polumjer opisane kružnice ima duljinu jednaku $\frac{2}{3}$ duljine visine jer je to udaljenost od vrha do težišta jednakostraničnog trokuta. 1 BOD

Slijedi $R=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 1 BOD

Dužina $\overline{CE}$ je promjer veće kružnice, a dužina $\overline{CD}$ je visina trokuta.
Prema tome, $2r = 2R - v$, 1 BOD

Odnosno $2r=\frac{2a\sqrt{3}}{3}-\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, 1 BOD

tj. $r=\frac{a\sqrt{3}}{12}$. 1 BOD

Površine manjeg i većeg kruga su $P_m=\left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2\pi=\frac{a^2}{48}\pi$ 1 BOD

i $P_v=\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi=\frac{a^2}{3}\pi$. 1 BOD

Omjer površina manjeg i većeg kruga je $\frac{a^2\pi}{48}:\frac{a^2\pi}{3}=\frac{a^2\pi}{48}\cdot\frac{3}{a^2\pi}=1:16$. 2 BODA

(**Napomena:** Priznaje se svaki ekvivalentan omjer.)

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Alternativno: Zadnja 4 BODA učenik može ostvariti bez računanja površina krugova.

Površine manjeg i većeg kruga odnose se kao kvadrati polumjera pripadnih kružnica. 1 BOD

Dakle, $P_m : P_v = r^2 : R^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{12}\right)^2 : \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{a^2}{48}:\frac{a^3}{3}=\frac{a^2}{48}\cdot\frac{3}{a^2}=\frac{1}{16}=1:16$. 3 BODA

(**Napomena:** Priznaje se svaki ekvivalentan omjer.)

3. Koliki je ostatak pri dijeljenju broja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 +\ldots+ 2^{2021}$ brojem 9?

Rješenje.

Prvi način:

Broj 1 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 1.
Broj 2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 2.
Broj 2^2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 4.
Broj 2^3 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 8.
Broj 2^4 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 7.
Broj 2^5 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5. 1 BOD

Kako 2^6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9, ostatci broja 2^n pri dijeljenju s 9 se ponavljaju periodički s periodom 6.
Zato najprije izračunamo zbroj ostataka za prvih šest pribrojnika $1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 5 = 27$ i zaključujemo da je zbroj $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ djeljiv s 9. 2 BODA

S obzirom da je $2^{6+k} = 2^6 \cdot 2^k$, 2^{6+k} za svaki nenegativni cijeli broj k daje isti ostatak pri dijeljenju s k kao i 2^k, tj. s obzirom da se ostatci broja 2^n pri dijeljenju s 9 ponavljaju periodički s periodom 6, zaključujemo da je zbroj $2^{6k} + 2^{6k+1} + 2^{6k+2} + 2^{6k+3} + 2^{6k+4} + 2^{6k+5}$ djeljiv s 9 za svaki nenegativni cijeli broj k. 3 BODA

Zbroj $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2021}$ ima 2 022 pribrojnika. 1 BOD

Kako je 2 022 djeljivo s 6**,** 1 BOD
pribrojnici u polaznom zbroju se mogu grupirati u skupine od 6 pribrojnika (tih skupina ima 337 jer je 2 022 : 6 = 337) čiji je zbroj djeljiv s 9 1 BOD
i time zaključujemo da je polazni zbroj djeljiv s 9, odnosno da je ostatak pri dijeljenju broja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 +\ldots+ 2^{2021}$ brojem 9 jednak 0. 1 BOD

Napomena: Umjesto da napiše općenito da je svaki zbroj $2^{6k} + 2^{6k+1} + 2^{6k+2} + 2^{6k+3} + 2^{6k+4} + 2^{6k+5}$ za svaki nenegativni cijeli broj k djeljiv s 9, učenik može napisati da je, zbog toga što se ostatci broja 2^n pri dijeljenju s 9 ponavljaju periodički s periodom 6, svaki od zbrojeva $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4+ 2^5$, $2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11}$, $2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17}$, itd. djeljiv s 9.

……………………………………………………………………..……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Broj 1 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 1.
Broj 2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 2.
Broj 2^2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 4.
Broj 2^3 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 8.
Broj 2^4 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 7.
Broj 2^5 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5. 1 BOD

Kako je za prvih 6 pribrojnika zbroj ostataka $1 + 2 + 4 + 8 + 7 + 5 = 27$, zaključujemo da je zbroj $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ djeljiv s 9. 2 BODA

Promotrimo li zbroj sljedećih šest pribrojnika
$2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} = 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$, zaključujemo da je i on djeljiv s 9, jer je izraz u zagradi djeljiv s 9, a možemo i općenito zaključiti da je
$2^{6k} + 2^{6k+1} + 2^{6k+2} + 2^{6k+3} + 2^{6k+4} + 2^{6k+5} = 2^{6k} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$ djeljivo s 9 za svaki nenegativni cijeli broj k (jer je izraz u zagradi djeljiv s 9), tj. da je zbroj svake sljedeće skupine od šest pribrojnika opet djeljiv s 9. 3 BODA

Zbroj $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2021}$ ima 2 022 pribrojnika. 1 BOD

Kako je 2 022 djeljivo s 6, 1 BOD
pribrojnici u polaznom zbroju se mogu grupirati u skupine od 6 pribrojnika (tih skupina ima 337 jer je 2 022 : 6 = 337) čiji je zbroj djeljiv s 9 1 BOD
i time zaključujemo da je polazni zbroj djeljiv s 9, odnosno da je ostatak pri dijeljenju broja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2021}$ brojem 9 jednak 0. 1 BOD

Napomena: Da bi učenik ustanovio da je svaki zbroj $2^{6k} + 2^{6k+1} + 2^{6k+2} + 2^{6k+3} + 2^{6k+4} + 2^{6k+5}$ za svaki nenegativni cijeli broj k djeljiv s 9, te da se cijeli zbroj može grupirati u takve skupine pribrojnika koji su djeljivi s 9, on može ispisati nekoliko sljedećih takvih skupina pribrojnika, npr.

$2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} = 2^6 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$
$2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} = 2^{12} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$
$2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} = 2^{18} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$

te potom zaključiti kako za svaku sljedeću skupinu od po 6 pribrojnika na isti način izlučimo redom 2^{24}, 2^{30}, … 2^{6k}, … i, s obzirom da je 2 022 djeljivo sa 6, tako sve do posljednjih 6 pribrojnika za koje vrijedi $2^{2016} + 2^{2017} + 2^{2018} + 2^{2019} + 2^{2020} + 2^{2021} = 2^{2016} \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$ te, koristeći činjenicu da je $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5$ djeljivo s 9, ustanoviti kako je traženi zbroj djeljiv s 9.
……………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:
Broj 1 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 1.
Broj 2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 2.
Broj 2^2 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 4.
Broj 2^3 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 8.
Broj 2^4 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 7.
Broj 2^5 pri dijeljenju s 9 daje ostatak 5. 1 BOD

Kako 2^6 daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9, ostatci broja 2^n pri dijeljenju s 9 se ponavljaju periodički s periodom 6.

Promotrimo zbroj $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{2021}$. Vrijedi:

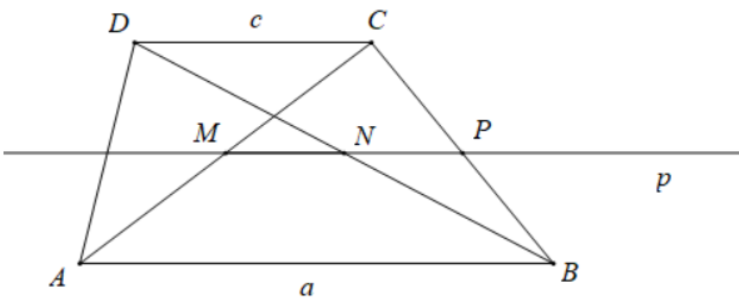
- zbroj prva dva pribrojnika je $1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$
- zbroj prva tri pribrojnika je $3 + 4 = 7 = 2^3 - 1$
- zbroj prva četiri pribrojnika je $7 + 8 = 15 = 2^4 - 1$

itd. 1 BOD

Pokažimo da će se uzorak nastaviti.
Ako je zbroj prvih k pribrojnika $1 + 2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, onda je zbroj prvih $k + 1$ pribrojnika jednak
$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \cdot 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$ 3 BODA
Zato je $1 + 2 + \ldots + 2^{2021} = 2^{2022} - 1$. 2 BODA
Budući da broj 2 022 daje ostatak 0 pri dijeljenju sa 6, zaključujemo da 2^{2022} daje ostatak 1 pri dijeljenju s 9, 2 BODA
pa traženi broj daje ostatak 0 pri dijeljenju s 9. 1 BOD
……………………………………………………………………………….. UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je $ABCD$ trapez kojemu je jedna osnovica dvostruko dulja od druge. Ako su M i N polovišta njegovih dijagonala, dokaži da je duljina dužine $\overline{MN}$ jednaka polovini duljine kraće osnovice.

Rješenje.



Označimo trapez kao na slici. Iz uvjeta zadatka je $a = 2c$.

Neka su M i N polovišta dijagonala. Potrebno je dokazati da je $|MN| = \dfrac{c}{2}$.

Označimo s P polovište kraka $\overline{BC}$ i nacrtajmo pravac p koji sadrži P i paralelan je s osnovicama trapeza. 2 BODA

Usporedni pravci AB i p odsijecaju na krakovima kuta $\angle ACB$ proporcionalne dužine tako da je $|CB| : |CP| = |CA| : |CM| = 2 : 1$, 1 BOD

pa je polovište dijagonale $\overline{AC}$ točka $M \in p$. 1 BOD

Usporedni pravci CD i p odsijecaju na krakovima kuta $\angle CBD$ proporcionalne dužine tako da je $|BC| : |BP| = |BD| : |BN| = 2 : 1$, 1 BOD

pa je polovište dijagonale $\overline{BD}$ točka $N \in p$. 1 BOD

Zato je $\overline{MP}$ srednjica trokuta ΔABC, a $\overline{NP}$ srednjica trokuta ΔBCD**.** 1 BOD

Prema poučku o srednjici trokuta vrijedi:

$|MP| = \dfrac{|AB|}{2} = \dfrac{a}{2}$ i $|NP| = \dfrac{|CD|}{2} = \dfrac{c}{2}$. 1 BOD

Slijedi $|MN| = |MP| - |NP| = \dfrac{a}{2} - \dfrac{c}{2} = c - \dfrac{c}{2} = \dfrac{c}{2}$. 2 BODA

……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Na svakoj stranici pravokutnika istaknuto je po 5 točaka koje nisu vrhovi pravokutnika. Koliko ima četverokuta kojima su vrhovi neke od tih 20 istaknutih točaka?

Rješenje.

Mogući su sljedeći slučajevi:
(i) Sva su četiri vrha četverokuta na različitim stranicama pravokutnika *ABCD*.
(ii) Dva su vrha četverokuta na jednoj, a dva na drugoj stranici pravokutnika *ABCD*.
(iii) Dva su vrha četverokuta na jednoj, jedan na drugoj i jedan na trećoj stranici pravokutnika *ABCD*. 1 BOD

Slučaj (i): Na svakoj stranici pravokutnika biramo jedan od pet mogućih vrhova pa je ukupni broj mogućnosti jednak $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$, 1 BOD
odnosno 625.

Slučaj (ii): Dvije stranice pravokutnika *ABCD* na kojima će biti vrhovi četverokuta možemo odabrati na $\frac{4 \cdot 3}{2}$ načina. 1 BOD

Dva vrha na jednoj fiksiranoj stranici pravokutnika *ABCD* možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina, pa dva vrha na jednoj fiksiranoj stranici pravokutnika *ABCD* i dva na drugoj možemo odabrati na $\left(\frac{5 \cdot 4}{2}\right)^2$ načina. 1 BOD
Zato je broj četverokuta s dva vrha na jednoj i dva na drugoj stranici pravokutnika *ABCD* jednak
$\frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \left(\frac{5 \cdot 4}{2}\right)^2$, 1 BOD*
odnosno 600.

Slučaj (iii): Jednu stranicu pravokutnika *ABCD* na kojoj će biti dva vrha četverokuta možemo odabrati na 4 načina, a za svaki takav izbor dvije stranice pravokutnika *ABCD* na kojima će biti po jedan vrh četverokuta možemo odabrati na $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ načina. Dakle, stranice na kojima se nalaze vrhovi četverokuta možemo odabrati na $4 \cdot 3$ načina. 1 BOD
Dva vrha na jednoj fiksiranoj stranici pravokutnika *ABCD* možemo odabrati na $\frac{5 \cdot 4}{2}$ načina, a po jedan vrh na dvije preostale fiksirane stranice pravokutnika na $5 \cdot 5 = 5^2$ načina, pa je zato mogući broj odabira vrhova pravokutnika jednak $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5^2$. 1 BOD
Zato je broj četverokuta s dva vrha na jednoj, jednim vrhom na drugoj i jednim na trećoj stranici pravokutnika *ABCD* jednak $4 \cdot 3 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5^2$, 1 BOD**
odnosno 3 000.

Ukupno, traženih četverokuta ima 625 + 600 + 3 000 = 4 225. 2 BODA
……………………………………………………………………..………. UKUPNO 10 BODOVA

Alternativno, u slučaju (iii) prebrojavati možemo i ovako:

Jednu stranicu pravokutnika *ABCD* na kojoj će biti dva vrha četverokuta možemo odabrati na 4 načina, a dva vrha na njoj određuje $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ različitih dužina (stranica pravokutnika). 1 BOD

Dvije stranice pravokutnika *ABCD* na kojima će biti po jedan vrh četverokuta možemo odabrati na $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$ načina, a na svakoj od njih vrh četverokuta na 5 načina. 1 BOD

Dakle stranice na kojima se nalaze vrhovi četverokuta možemo odabrati na $4 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3\ 000$ načina. 1 BOD**

Napomene:

1.* 1 BOD za zadnji korak u (ii) učenik treba dobiti i ukoliko napravi manju pogrešku u prebrojavanju broja mogućih izbora stranica na kojima se nalaze vrhovi, odnosno broju mogućih izbora vrhova.
Npr. ako pod (ii) učenik ukupni broj četverokuta računa kao $4 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)^2$, on na dijelu (ii) treba dobiti 1 od 3 boda.

2.** 1 BOD za zadnji korak u (iii) učenik treba dobiti i ukoliko napravi manju pogrešku u prebrojavanju broja mogućih izbora stranica na kojima se nalaze vrhovi, odnosno broju mogućih izbora vrhova.
Npr. ako pod (iii) učenik ukupni broj četverokuta računa kao $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5^2$, on na dijelu (iii) treba dobiti 1 od 3 boda, a ako učenik ukupni broj četverokuta računa kao $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 5^2$ ili kao $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5^2$, treba dobiti 2 (1+1) od 3 boda.

3. Oba zadnja boda za račun (množenje, potenciranje i zbrajanje) mogu se dobiti jedino ukoliko je u sva tri slučaja (i), (ii) i (iii) sve dobro postavljeno i potom dobro izračunat ukupni broj traženih četverokuta. Pritom u slučaju jedne pogreške (pogrešno izračunat broj mogućih četverokuta u slučaju (i) ili u slučaju (ii) ili u slučaju (iii) ili pogrešno zbrojen broj mogućnosti, učenik dobiva 1 BOD, a ako napravi više od jedne pogreške ne dobiva niti jedan bod. U slučaju da učenik potpuno točno izračuna broj mogućih četverokuta u dva od tri slučaja (i), (ii) i (iii), a uopće ne promatra treći te točno zbroji ta dva broja, također dobiva 1 od zadnja 2 boda.