Državno natjecanje iz fizike, 19. - 20. studeni 2020.
Rješenja i smjernice za bodovanje – 3. skupina

Zadatak 1 (16 bodova)

a) Udaljavanjem ploča kondenzatora smanjuje mu se kapacitet, po relaciji:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{x}$$

(2 boda)

gdje je x udaljenost među pločama a S površina ploča. Frekvencija je u strujnom krugu dana relacijom:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

(2 boda)

pa se smanjivanjem kapaciteta kondenzatora povećava frekvencija strujnog kruga: $\omega_1 = \eta\omega_0$. **(1 bod)**

b) Novi kapacitet kondenzatora može se izraziti preko nove frekvencije strujnog kruga:

$$C_1 = \frac{1}{L\omega_1^2} = \frac{1}{\eta^2 L\omega_0^2} = \frac{1}{\eta^2} C_0$$

Iz te relacije možemo izraziti pomak ploča kondenzatora:

$$\varepsilon_0 \frac{S}{x_1} = \frac{1}{\eta^2}\, \varepsilon_0 \frac{S}{x_0}$$

Nova udaljenost među pločama je veća za faktor η^2 od početne. **(4 boda)**

c) Energija u oscilatornom strujnom krugu se nalazi u kondenzatoru i zavojnici. Radi jednostavnosti, možemo ukupnu energiju izraziti kao maksimalnu energiju na kondenzatoru:

$$E_0 = \frac{1}{2} \frac{Q_{max}^2}{C_0}$$

(4 boda)

S obzirom da se maksimalni naboj ne mijenja na kondenzatoru, jedina promjena dolazi od promjene kapaciteta, pa je ukupna energija u novom sustavu:

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_{max}^2}{C_1} = \eta^2 E_0$$

Utrošeni rad jednak je razlici konačne i početne energije, te iznosi:

$$W = E_1 - E_0 = \left(\eta^2 - 1\right) E_0$$

(3 boda)

Zadatak 2 (18 bodova)

Moment inercije za puni cilindar dan je s

$$I = \frac{1}{2}Mr^2$$

a) Udarom glinamola o lopaticu prenosi se kutna količina gibanja na kotač. Kutna količina gibanja ovisi o izboru ishodišta, a mi biramo ishodište na osi rotacije kotača. Komadić glinamola s obzirom na ishodište ima kutnu količinu gibanja koja u trenutku udara o kotač iznosi $L_g = Rmv$. **(3 boda)**

Iz zakona očuvanja kutne količine gibanja:

$$Rmv = I\omega_1$$

Direktno možemo pisati:

$$\omega_1 = \frac{mR}{2Mr^2}v$$

Za udar druge kuglice, kotač se već rotira. Pišemo:

$$Rmv + I\omega_1 = 2Rmv = I\omega_2$$

Vidimo da je povećanje kutne količine gibanja jednako Rmv za svaki udar. Općenito, dakle, izraz za brzinu rotacije kotača nakon n-tog udara je:

$$\omega_n = \frac{2nRmv}{Mr^2}$$

(4 boda)

b) Da bi brzina kotača odgovarala jednom okretaju u sekundi, moramo imati kutnu brzinu $\omega = 2\pi$ rad/s. **(2 boda)**
Iz toga možemo naći broj udara:

$$n = \frac{Mr^2\omega_n}{2Rmv}$$

(3 boda)

Rezultat je $n = 837.76$, tj. nešto više od 837 puta.

c) Maksimalna brzina koju kotač može dobiti dobije se kada je brzina lopatice kotača jednaka brzini glinamola. Tada se glinamol neće sudariti s lopaticom, već će proći pored nje. **(2 boda)**

Kutna brzina koja odgovara brzini lopatice od $v = 5$ m/s na udaljenosti R je:

$$\omega_{max} = \frac{v}{R} = 16.67 \text{ rad/s}$$

(3 boda)

Preračunato u okretaje u sekundi, radi se o $\omega = 2.65$ o/s. **(1 bod)**

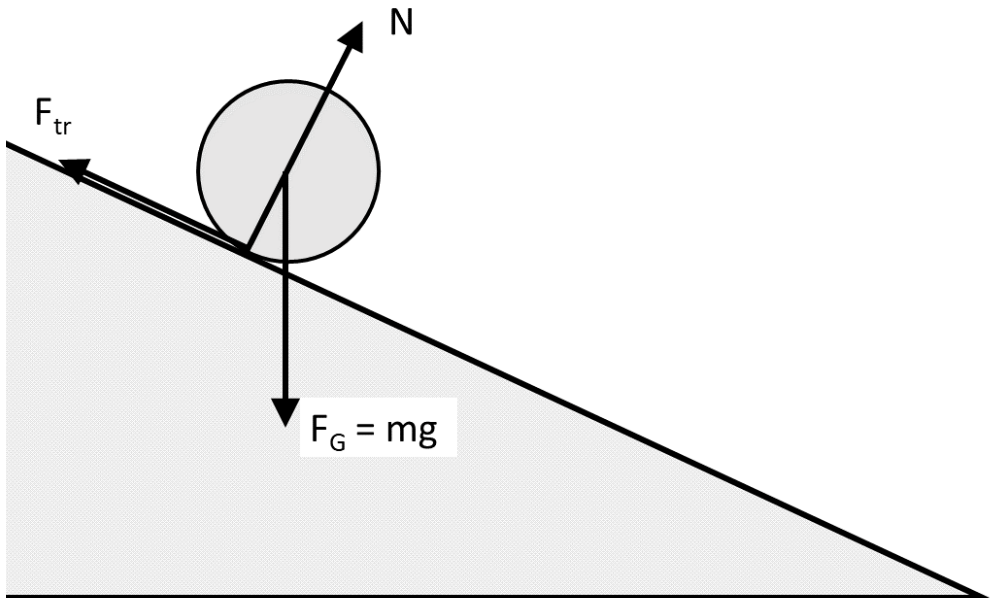
Zadatak 3 (18 bodova)

Valjak se kotrlja niz kosinu. Sva tri valjka imaju iste mase, ali različit moment inercije:

$$I_A = \frac{1}{2}mR^2\ ;\ I_B = mR^2\ ;\ I_C = 2mR^2$$

(2 boda)

a) Tri su sile na valjak na kosini: gravitacijska sila, sila trenja i sila otpora podloge. Gravitacijska sila ima hvatište u centru mase valjka, dok druge dvije sile imaju hvatište u dodirnoj točki valjka s podlogom. **(4 boda)**



b) Napišemo li jednadžbu gibanja za valjak na kosini u smjeru gibanja:

$$ma = mg\sin\alpha - F_{tr}$$

Povežemo li silu trenja s kotrljanjem valjka

$$I\alpha = RF_{tr}$$

te izrazimo li kutnu akceleraciju preko translacijske (valjak ne proklizava):

$$\alpha = \frac{a}{R}$$

Uvrštavanjem ove dvije relacije u prvu pišemo:

$$ma = mg\sin\alpha - \frac{I}{R^2}a$$

Možemo izraziti akceleraciju valjka:

$$a = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Iz jednadžbe je očito da će tijela s većim momentom inercije sporije ubrzavati niz kosinu. Redosljed dolaska na dno kosine je dakle A, B, C.
Drugi način da se dođe do ovog podatka je opisom. Moment inercije se opire rotacijskom gibanju, pa će tijelo s većim momentom inercije sporije ubrzavati svoju rotaciju, a time i gibanje niz kosinu. Za detaljni i jasan opis daju se svi bodovi. **(3 boda)**

c) Ako smo riješili jednadžbu gibanja i dobili izraz za akceleraciju, lagano ćemo naći brzinu na dnu kosine, preko formule

$$v = \sqrt{2al}$$

Drugi, jednostavniji način, bez jednadžbe gibanja, je promatrajući energiju valjka. Na vrhu kosine valjak ima gravitacijsko potencijalnu energiju koju na dnu kosine svu pretvori u kinetičku energiju translacije i kotrljanja:

$$mgl\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

(3 boda)

Izrazimo kutnu brzinu preko translacijske $\omega = v/R$ te napišimo jednadžbu po brzini v:

$$v = \sqrt{\frac{2gl\sin\alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}}$$

(3 boda)

Ovaj izraz je identičan izrazu preko jednadžbe gibanja. Rješenje za brzinu, uz poznate vrijednosti je:

$$v_A = 8.09\mathrm{m/s}, \quad v_B = 7.00\mathrm{m/s}, \quad v_C = 5.72\mathrm{m/s}.$$

(3 boda)

Zadatak 4 (18 bodova)

Bakrena šipka stegnuta je na sredini, što znači da u sredini postoji čvor stojnog vala. Rubovi šipke se ponašaju kao slobodni krajevi. Moguće valne duljine stojnog vala dane su rubnim uvjetom:

$$l = \frac{2n+1}{2}\lambda \; ; \; n = 0, 1, 2, ...$$

(3 boda)

Relacija između frekvencije i valne duljine je: $f = c/\lambda$. Moguće frenvekcije titranja su dakle:

$$f = (2n+1)\frac{c}{2l} \; ; \; n = 0, 1, 2, ...$$

Dakle, dozvoljene frekvencije titranja šipke su redom: $f = \frac{c}{2l}, 3\frac{c}{2l}, 5\frac{c}{2l}$,... Drugim riječima, udaljenost među frekvencijama je konstantna, i iznosi:

$$\Delta f = \frac{c}{l}$$

Znamo da je $f_n > 20$ kHz, za neki n, i da ukupno ima $N = 13$ frekvencija, tj. znamo i $f_{n+12} < 50$ kHz. **(3 boda)**

Možemo napisati tri nejednadžbe:

$$\begin{aligned} f_{min} &> 20\text{kHz} \\ f_{max} = f_{min} + 12\Delta f &< 50\text{kHz} \\ f_{max+1} = f_{min} + 13\Delta f &> 50\text{kHz} \end{aligned}$$

(4 boda)

Oduzimanjem prve od druge dobijemo:

$$12\Delta f = 12\frac{c}{l} < 30\text{kHz}$$

tj. $c < 5000$ m/s. Oduzimanjem prve od treće dobijemo:

$$13\Delta f = 13\frac{c}{l} > 30\text{kHz}$$

tj. $c > 4615$ m/s.

Dakle rješenje je

$$4615 < c(m/s) < 5000$$

(2 boda)

Pravi rezultat za bakar je $c = 4760$.

Preciznost mjerenja ovisi o veličini s kojom mjerimo. U ovom postavu mjerimo brzinu zvuka uspoređujući razmak prirodnih frekvencija, Δf. Stoga, smanjivanjem te vrijednosti možemo povećati preciznost – treba nam duža šipka. **(3 boda)**
Drugi način mjerenja, kojim bi efektivno povećali duljinu šipke je da je uhvatimo na jednom kraju. Efekt toga je kao da smo povećali duljinu šipke za 2! **(3 boda)**