**Državno natjecanje iz fizike 2019/2020**

19.-20. studeni 2020.

**Rješenja i smjernice za bodovanje**

**Srednje škole – 1. grupa**

## 1. zadatak (17 bodova)

Postavimo koordinatnu sustav tako da je $x$ os prema desno, a $y$ os prema dolje. Ishodište koordinatnog sustava neka je u točki u kojoj se pikula odvaja od horizontalne podloge. Za gibanje u $x$ i $y$ smjeru možemo pisati:

$x(t) = v_0 t$, **(1 bod)**

$y(t) = \dfrac{1}{2} g t^2$. **(1 bod)**

Možemo izračunati horizontalni pomak pikule u tenucima kada se pikula nalazi na visini pojedine stepenice. Stepenice brojimo od tla prema gore. Iz druge jednadžbe izrazimo vrijeme:

$t = \sqrt{\dfrac{2y}{g}}$

i uvrstimo u prvu jednadžbu:

$x(y) = v_0 \sqrt{\dfrac{2y}{g}}$.

| stepenica | $y$ (m) | $x$ (m) | rub stepenice (m) |
|---|---|---|---|
| 7. | 0.25 | 0.63 | 0.3 |
| 6. | 0.50 | 0.89 | 0.6 |
| 5. | 0.75 | 1.04 | 0.9 |
| 4. | 1.00 | 1.25 | 1.2 |
| 3. | 1.25 | 1.40 | 1.5 |

Zaključujemo da će pikula pasti na treću stepenicu od tla. **(4 boda)** Gibanje pikule možemo podijeliti u tri etape: od vrha stepenica do 3. stepenice, od 3. stepenice do najviše točke putanje i zatim od najviše točke putanje do pada na tlo. Vrijeme potrebno za svaku etapu jednako je:

$y_1 = 1.25\ \mathrm{m} = \dfrac{1}{2} g t_1^2 \ \Rightarrow\ t_1 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 1.25\ \mathrm{m}}{g}} = 0.5\ \mathrm{s}$. **(1 bod)**

Pikula se elastično sudara sa stepenicom što znači da nakon sudara $y$ komponenta brzine pikule mijenja smjer, dok $x$ komponenta brzine ostaje nepromijenjena. Vrijeme potrebno pikuli do najviše točke putanje $t_2$ jednako je vremenu $t_1$ radi simetrije problema. **(1 bod)**

Vrijeme pada s najviše točke putanje na tlo jednako je:

$y_3 = 2.0\ \mathrm{m} = \dfrac{1}{2} g t_3^2 \ \Rightarrow\ t_1 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 2.0\ \mathrm{m}}{g}} = 0.633\ \mathrm{s}$. **(1 bod)**

Prema tome, ukupno vrijeme leta jednako je $t_{ukupno} = t_1 + t_2 + t_3 = 1.633$ s. **(1 bod)**

Ukupna horizontalna udaljenost, koju prijeđe pikula, jednaka je:

$x_{ukupno} = v_0 \cdot t_{ukupno} = 4.57$ m, **(2 boda)**

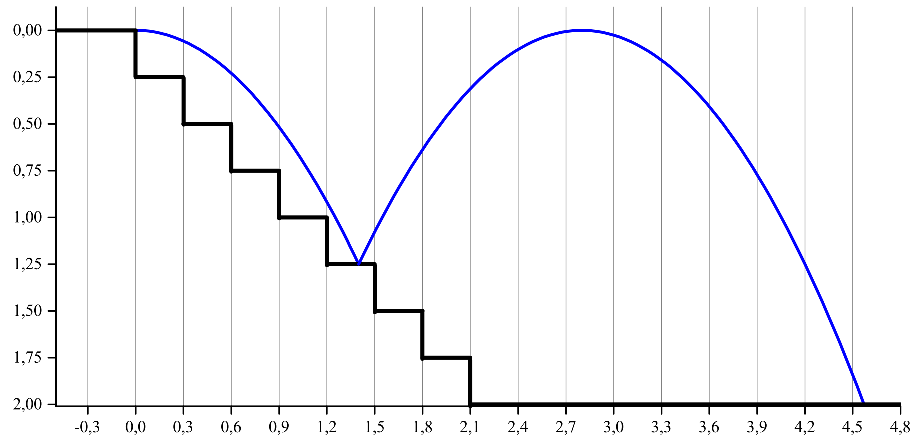
a udaljenost od podnožja stepenica jednaka je: $x_{ukupno} - 7 \cdot 0.3\ \mathrm{m} = 2.47$ m. **(1 bod)**

Brzinu $v$ u trenutku pada na tlo možemo izračunati pomoću zakona očuvanja energije:

$E_{pocetna} = E_{konacna}$,

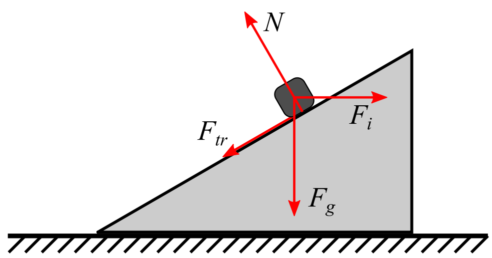
$\dfrac{1}{2} m v_0^2 + m g h_{ukupno} = \dfrac{1}{2} m v^2$,

$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 6.92$ m/s. **(2 boda)**
Putanja pikule prikazana je na slici. **(2 boda)**




## 2. zadatak (18 bodova)

Sve sile, koje djeluju na malo tijelo za vrijeme jednoliko ubrzanog gibnja kosine, prikazane su na slici desno u sustavu kosine (skica: **2 boda**). Drugi Newtonov zakon možemo napisati za smjer paralelno kosini i smjer okomito na kosinu:

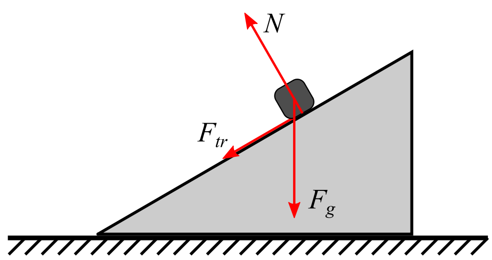



$ma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}F_i - \frac{1}{2}mg - F_{tr}$, **(1 bod)**

$0 = N - \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{1}{2}F_i$. **(1 bod)**

Inercijalna sila $F_i$ jednaka je umnošku mase malog tijela i ubrzanja kosine $a$. **(1 bod)**
Sila trenja jednaka je:
$F_{tr} = \mu N$. **(1 bod)**
Iz druge jednadžbe slijedi:
$N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{1}{2}ma.$
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:
$ma_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}ma - \frac{1}{2}mg - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}mg - \mu\frac{1}{2}ma.$
Sređivanjem se za ubrzanje malog tijela dobije:
$a_1 = \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{3} - \mu\right)a - \left(1 + \mu\sqrt{3}\right)g\right)$. **(2 boda)**

Za vrijeme jednolikog gibanja kosine na malo tijelo na kosini djeluju sile prikazane na slici desno (skice: **1 bod**). Drugi Newtonov zakon za smjer paralelno kosini i okomito na kosinu glasi:




$ma_2 = -\frac{1}{2}mg - F_{tr}$, **(1 bod)**

$0 = N - \frac{\sqrt{3}}{2}mg$. **(1 bod)**

Sila trenja u ovom slučaju je jednaka:

$F_{tr} = \mu N = \mu \frac{\sqrt{3}}{2} mg.$
Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobije se:
$ma_2 = -\frac{1}{2}mg - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}mg,$
$a_2 = -\frac{1}{2}\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)g,$
$a_2 = -6.6\ \mathrm{m/s^2}.$ **(2 boda)**
Negativan predznak ubrzanja $a_2$ označava da je smjer ubrzanja niz kosinu, odnosno da se malo tijelo giba jednoliko usporeno do zaustavljanja. Iz uvjeta zadatka možemo odrediti početnu brzinu ovog jednoliko usporenog gibanja:
$s_2 = \frac{1}{4}l = 0.5\ \mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2a_2},$
$v_0 = \sqrt{2s_2a_2} = 2.57\ \mathrm{m/s}.$ **(2 boda)**
Ovu brzinu tijelo ima na kraju prvog dijela gibanja koje je jednoliko ubrzano uz kosinu. Vrijedi:
$s_1 = \frac{3}{4}l = 1.5\ \mathrm{m} = \frac{v_0^2}{2a_1}.$
Slijedi da je ubrzanje $a_1$ jednako:
$a_1 = \frac{v_0^2}{2s_1} = \frac{2s_2a_2}{2s_1} = \frac{s_2}{s_1}a_2 = \frac{1}{3}a_2 = 2.2\ \mathrm{m/s^2}.$ **(2 boda)**
Sada možemo izračunati ubrzanje kosine $a$:
$a = \frac{2a_1 + \left(1 + \mu\sqrt{3}\right)g}{\sqrt{3} - \mu},$
$a = \frac{\frac{1}{3}\left(1 + \mu\sqrt{3}\right)g + \left(1 + \mu\sqrt{3}\right)g}{\sqrt{3} - \mu},$
$a = \frac{4}{3} \cdot \frac{1 + \mu\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \mu}g = a = 11.5\ \mathrm{m/s^2}.$ **(1 bod)**

## 3. zadatak (17 bodova)

U slučaju kada je $\alpha \ll$ kroz valjak će proći neutroni brzine $v_0$ takve da je vrijeme prolaska neutrona duljinom valjka jednako vremenu u kojem se valjak zakrene za kut $\beta$. Prema tome, vrijedi:
$d = v_0\Delta t,$ **(2 boda)**
$\beta = \omega\Delta t.$ **(2 boda)**
Iz druge jednadžbe izrazimo $\Delta t$ i uvrstimo u prvu:
$v_0 = \frac{d\omega}{\beta} = \frac{0.56\ \mathrm{m} \cdot 90 \cdot 2\pi\ \mathrm{rad/s}}{24 \cdot \frac{\pi}{180}} = 756\ \mathrm{m/s}.$ **(3 boda)**
Minimalna brzina neutrona koji prolaze kroz valjak određena je uvjetom:
$d = v_{min}\Delta t',$ **(1 bod)**
$\beta + \alpha = \omega\Delta t'.$ **(2 boda)**
Maksimalna brzina neutrona koji prolaze kroz valjak određena je uvjetom:
$d = v_{max}\Delta t'',$ **(1 bod)**
$\beta - \alpha = \omega\Delta t''.$ **(2 boda)**
Slijedi:

$$\Delta v = v_{max} - v_{min} = d\left(\frac{1}{\Delta t''} - \frac{1}{\Delta t'}\right) = d\omega\left(\frac{1}{\beta-\alpha} - \frac{1}{\beta+\alpha}\right) = d\omega\frac{2\alpha}{\beta^2-\alpha^2} = \frac{d\omega}{\beta^2}\frac{2\alpha}{1-\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2} \approx$$

$$\frac{2d\omega\alpha}{\beta} = v_0\frac{2\alpha}{\beta}.$$

Prema tome, traženi omjer je jednak:

$\frac{\Delta v}{v_0} = \frac{2\alpha}{\beta} = 0.175.$ **(4 boda)**

## 4. zadatak (18 bodova)

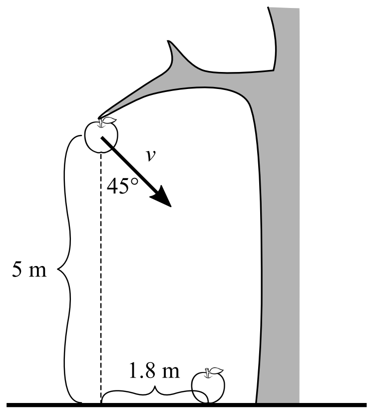
Najprije možemo izračunati vrijeme slobodnog pada s visine $h = 5$ m:

$h = \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1$ s. **(2 boda)**

S obzirom na to da je vrijeme pada jabuke kraće od vremena slobodnog pada zaključujemo da je jabuka u početnom trenutku imala komponentu brzine vertikalno prema dolje. **(1 bod)** Također, s obzirom na to da je jabuka pala na određenoj horizontalnoj udaljenosti od početnog položaja zaključujemo da je u početnom trenutku imala i horizontalnu komponentu brzine. **(1 bod)** Komponente brzine izračunamo na način:

$d = v_x t_{pad} \;\Rightarrow\; v_x = \frac{d}{t_{pad}} = \frac{1.8\text{ m}}{0.8\text{ s}} = 2.25$ m/s. **(2 boda)**

$h = v_y t_{pad} + = \frac{1}{2}gt_{pad}^2 \;\Rightarrow\; v_y = \frac{h}{t_{pad}} - \frac{1}{2}gt_{pad} = 2.25$ m/s. **(2 boda)**




Vidimo da su $x$ i $y$ komponenta brzine jabuke na početku padanje jednake, što znači da je smjer brzine 45° u odnosu na horizontalu prema dolje (vidi sliku). **(1 bod)**

Brzinu kuglice u trenutku neposredno prije sudara s jabukom izračunamo pomoću zakona očuvanja količine gibanja:

$m_{kuglica}\vec{v}_{kuglica} = (m_{kuglica} + m_{jabuka})\,\vec{v}$, **(2 boda)**

gdje je $\vec{v} = v_x\hat{x} - v_y\hat{y} = 2.25\text{ m/s}\,(\hat{x} - \hat{y})$,a iznos brzine je $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3.18$ m/s. **(1 bod)**

Smjer brzine kuglice neposredno prije sudara s jabukom je također 45° u odnosu na horizontalu prema dolje. Slijedi:

$\vec{v}_{kuglica} = \frac{m_{kuglica} + m_{jabuka}}{m_{kuglica}}(v_x\hat{x} - v_y\hat{y}) = \frac{50 + 400}{50} \cdot 2.25\text{ m/s}\,(\hat{x} - \hat{y}) = 20.25\text{ m/s}\,(\hat{x} - \hat{y}).$

$v_{kuglica} = \sqrt{2} \cdot 20.25\text{ m/s} = 28.6$ m/s. **(2 boda)**

Ukupna energija kuglice neposredno prije sudara s jabukom jednaka je elastičnoj energiji praćke na početku:

$\frac{1}{2}k\Delta l^2 = \frac{1}{2}m_{kuglica}v_{kuglica}^2 + m_{kuglica}gh,$ **(2 boda)**

gdje je $\Delta l = 1.8l_0 - l_0 = 0.8l_0 = 0.4$ m produljenje elastične trake.

Slijedi da je konstanta elastičnosti jednaka:

$k = \frac{m_{kuglica}}{\Delta l^2}\left(v_{kuglica}^2 + 2gh\right) = 288$ N/m. **(2 boda)**