

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-1.1.

Riješite sustav jednačbi

$$\begin{aligned}x(y + z) &= 3 \\y(x + z) &= -32 \\z(x + y) &= -5.\end{aligned}$$

Prvo rješenje.

Zbrajanjem danih jednačbi dobivamo $2xy + 2xz + 2yz = -34$ odnosno $xy + xz + yz = -17$.

Kako je $xy + xz = 3$, slijedi $yz = -20$.

Analogno dobivamo $xz = 15$ i $xy = -12$.

Množenjem triju tako dobivenih jednakosti dobivamo $x^2y^2z^2 = 60^2$ odakle slijedi da je $xyz = 60$ ili $xyz = -60$.

Iz $xyz = 60$ i $yz = -20$ slijedi $x = -3$,

iz $xyz = 60$ i $xz = 15$ slijedi $y = 4$,

a iz $xyz = 60$ i $xy = -12$ slijedi $z = -5$.

Dakle, jedno rješenje je $(-3, 4, -5)$.

Iz $xyz = -60$ i $yz = -20$ slijedi $x = 3$,

iz $xyz = -60$ i $xz = 15$ slijedi $y = -4$,

a iz $xyz = -60$ i $xy = -12$ slijedi $z = 5$.

Dakle, drugo rješenje je $(3, -4, 5)$.

Drugo rješenje.

Izrazimo npr. $x = \frac{3}{y+z}$ iz prve jednačbe te uvrstimo u druge dvije.

$$\begin{aligned}y\left(\frac{3}{y+z} + z\right) &= -32 \\z\left(\frac{3}{y+z} + y\right) &= -5.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\frac{3y}{y+z} + yz &= -32 \\ \frac{3z}{y+z} + yz &= -5,\end{aligned}$$

a oduzimanjem tih jednačbi dobivamo

$$\frac{3(y-z)}{y+z} = -27 \quad \text{odnosno} \quad \frac{(y-z)}{y+z} = -9.$$

Slijedi $y - z = -9(y + z)$, tj. $y = -\frac{4}{5}z$.

Uvrštavanjem u jednu od prethodnih jednačbi dobivamo $z^2 = 25$.

Ako je $z = 5$, onda je $y = -4$ te $x = 3$, a ako je $z = -5$, onda je $y = 4$ te $x = -3$.

Rješenja danog sustava su $(3, -4, 5)$ i $(-3, 4, -5)$.

Zadatak B-1.2.

Zadan je izraz $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2019| + |x-2020|$.

Odredite najveći interval realnih brojeva $[a, b]$ na kojemu dani izraz ima konstantnu vrijednost k za sve $x \in [a, b]$. Kolika je vrijednost konstante k ?

Rješenje.

Vrijednost danog izraza ovisi o predznaku svakog od izraza unutar apsolutne vrijednosti, pa se računa po intervalima od $(-\infty, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, \dots , $[1010, 1011]$, \dots , $[2019, 2020]$, $[2020, \infty)$.

Ta vrijednost neće ovisiti o varijabli x na onom intervalu na kojem će zbroj svih varijabli biti jednak 0. To znači da na tom intervalu polovica od svih izraza unutar apsolutne vrijednosti mora biti pozitivna, a druga polovica negativna. Uočimo da je svaki od 1010 izraza $x-1$, $x-2$, \dots , $x-1010$ pozitivan, a svaki od 1010 izraza $x-1011$, $x-1012$, \dots , $x-2020$ negativan na intervalu $[1010, 1011]$.

Stoga za $x \in [1010, 1011]$ imamo

$$\begin{aligned} &|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-2019| + |x-2020| \\ &= x-1 + x-2 + x-3 + \dots + x-1010 + (-x+1011 - x+1012 - x+1013 - \dots - x+2020) \\ &= (-1-2-3-\dots-1010) + (1011+1012+1013+\dots+2020) \\ &= (-1+1011) + (-2+1012) + (-3+1013) + \dots + (-1010+2020) \\ &= 1010 \cdot 1010 = 1010^2. \end{aligned}$$

Zadatak B-1.3.

Jurica i Lucija igraju igru pogađanja brojeva. U jednom trenutku Lucija kaže Jurici:

”Moj je broj djeljiv s 2, ali nije s 4 te pri dijeljenju sa 16 ne daje ostatak 14. Zbroj njegovih znamenki je 6 i ima točno 8 djelitelja, a zbroj djelitelja je djeljiv s 10.”

Može li Jurica na temelju tih podataka pogoditi o kojem je broju riječ?

Rješenje.

Neka je n traženi broj. Kako je zbroj znamenki jednak 6, broj n je djeljiv s 3.

Broj n nije djeljiv s 4 (po uvjetu zadatka) ni s 9 (zbroj znamenki je 6), stoga se 2 i 3 kao prosti faktori od n javljaju samo jednom.

Broj n ima 8 djelitelja, što znači da osim 2 i 3 ima još neki prosti faktor $p \neq 2$, $p \neq 3$ u svom rastavu, tj. n je oblika $n = 6p$.

Djelitelji broja n su: 1, 2, 3, 6, p , $2p$, $3p$, $6p$.

Njihov je zbroj jednak $1 + 2 + 3 + 6 + p + 2p + 3p + 6p = 12 + 12p = 12(1 + p)$.

Kako je taj zbroj djeljiv s 10, broj $(1 + p)$ mora biti djeljiv s 5, tj. zadnja znamenka broja p treba biti 4 ili 9. Kako je p prost broj, njegova je zadnja znamenka 9, što daje 4 kao zadnju znamenku broja n .

Kako je zbroj znamenki od n jednak 6, dvoznamenkasti završetak broja n može biti 04, 14 ili 24, a kako n nije djeljiv 4, jedina mogućnost je 14. Znači, broj n je oblika $n = 100 \dots 014$.

Treba još odrediti koliko je znamenki 0 u zapisu broja n . Broj n možemo zapisati u obliku $n = 10^x + 14$, $x > 1$.

Kako je 10^x djeljivo sa 16 za $x \geq 4$ (u tom bi slučaju ostatak pri dijeljenju broja n sa 16 bio 14, protivno pretpostavci), dovoljno je provjeriti za $x = 2$ i $x = 3$.

Za $x = 2$ je $n = 114 = 6 \cdot 19$, a kako je 19 prosti broj, ovo rješenje ispunjava uvjete zadatka.

Za $x = 3$ je $n = 1014 = 6 \cdot 169$, a kako je 169 složeni broj, ovo rješenje ne ispunjava uvjete zadatka.

Jurica može na temelju zadanih podataka pogoditi da se radi o broju 114.

Zadatak B-1.4.

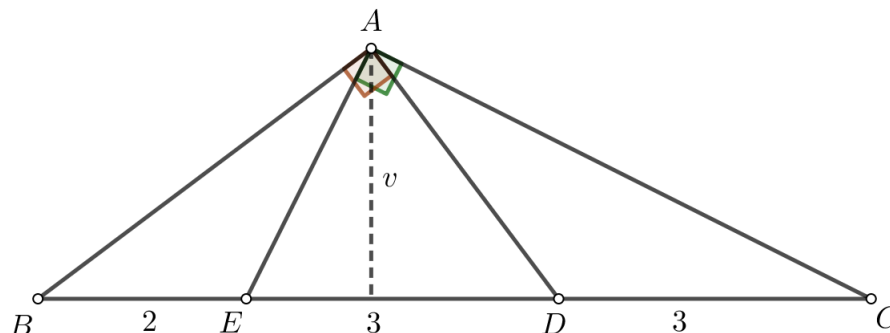
Na stranici \overline{BC} trokuta ABC odabrane su točke D i E tako da vrijedi

$$\angle BAD = \angle EAC = 90^\circ, \quad |BE| = 2, \quad |ED| = 3, \quad |DC| = 3.$$

Izračunajte $\sin(2 \cdot \angle ACB)$ i površinu trokuta ABC .

Prvo rješenje.

U pravokutnom trokutu AEC točka D je polovište hipotenuze, tj. ujedno je i središte opisane kružnice tog trokuta i vrijedi $|AD| = 3$.



Iz pravokutnog trokuta ABD dobivamo

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |BD|^2 - |AD|^2 \\ |AB|^2 &= 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \\ |AB| &= 4. \end{aligned}$$

Iz površine trokuta ABD izračunat ćemo visinu v .

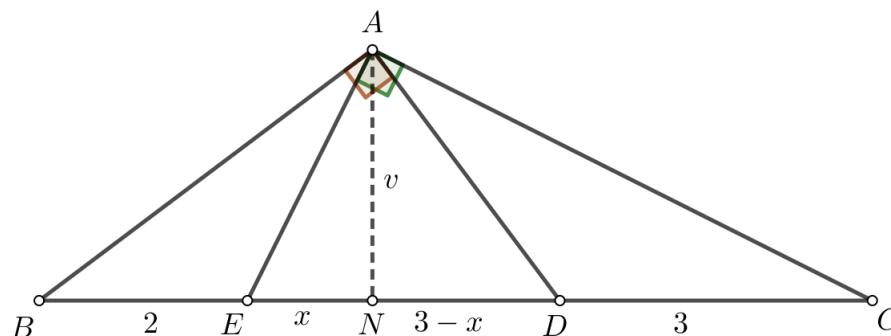
$$\begin{aligned} P_{ABD} &= \frac{|BD| \cdot v}{2} = \frac{|AB| \cdot |AD|}{2} \\ v &= \frac{|AB| \cdot |AD|}{|BD|} = \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

Površina trokuta ABC jednaka je $P = \frac{|BC| \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{48}{5}$.

Trokut DCA je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD$, a kako je $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle ADE$ je vanjski kut trokuta DCA , imamo $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADE = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACB$.

Konačno, u pravokutnom trokutu ABD je $\sin(2\sphericalangle ACB) = \sin \sphericalangle ADB = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{4}{5}$.

Drugo rješenje.



Primijenimo li Euklidov poučak na pravokutne trokute ABD i AEC (ili sličnost pravokutnih trokuta na koje visina v dijeli trokut ABD , odnosno AEC) dobivamo $v^2 = x(6 - x)$ i $v^2 = (3 - x)(2 + x)$.

Odatle slijedi $x(6 - x) = (3 - x)(2 + x)$, odnosno $x = \frac{6}{5}$. Tada je $v = \frac{12}{5}$ i $|AD| = 3$.

Površina trokuta ABC je $P = \frac{|BC| \cdot v}{2} = \frac{8 \cdot \frac{12}{5}}{2} = \frac{48}{5}$.

Kako je $|AD| = 3 = |DC|$, trokut ADC je jednakokračan, pa dalje računamo kao i u prvom rješenju: $\sphericalangle ADB = \sphericalangle DAC + \sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACD = 2\sphericalangle ACB$.

Konačno, u pravokutnom trokutu ABD je $\sin(2\sphericalangle ACB) = \sin \sphericalangle ADB = \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{4}{5}$.

Zadatak B-1.5.

Dvije prijateljice Esma i Ljerka osmislile su igru: svako se slovo imena zamijeni znamenkom od 1 do 5 prema danoj tablici. Tako ime Esma ima kod 4431, a Ljerka 24351.

Znamenke dobivenog koda $a_1a_2 \dots a_k$ koriste se za kretanje koracima iste duljine. Od početne se točke kreće a_1 koraka u smjeru sjevera, a za svaku sljedeću znamenku a_i zakreće se za 90° ulijevo i hoda a_i koraka u tom smjeru (dakle a_2 koraka u smjeru zapada, a_3 koraka u smjeru juga, a_4 koraka u smjeru istoka i tako dalje). Postupak se ponavlja (nakon posljednje znamenke nastavlja se s prvom znamenkom koda) sve do povratka u početnu točku.

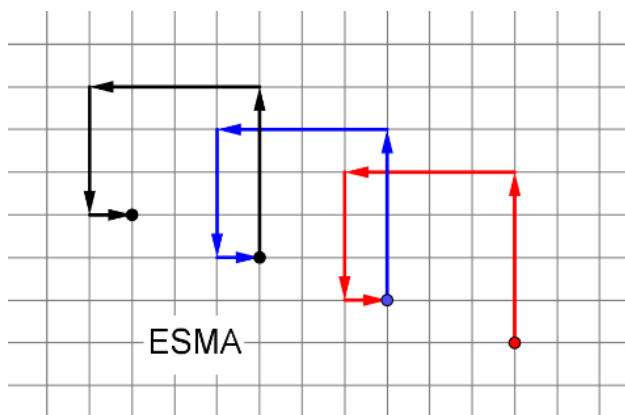
1	2	3	4	5
A	B	C	Č	Ć
D	DŽ	Đ	E	F
G	H	I	J	K
L	LJ	M	N	NJ
O	P	R	S	Š
T	U	V	Z	Ž

Esma je zaključila da se svojim kodom nikada neće vratiti u početnu točku. Zašto?

Ljerka se u početnu točku vratila nakon točno $5n$ koraka. Odredite n i dokažite da će se svaka osoba s 5 slova u imenu vratiti u početnu točku nakon najviše $5n$ koraka.

Rješenje.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su Esma i Ljerka krenula iz točke $(0, 0)$.



Esmino kretanje izgleda ovako:

Prvi krug: $(0, 0), (0, 4), (-4, 4), (-4, 1), (-3, 1)$

Drugi krug: $(-3, 1), (-3, 5), (-7, 5), (-7, 2), (-6, 2)$

Treći krug: $(-6, 2), (-6, 6), (-10, 6), (-10, 3), (-9, 3)$.

Nakon k -tog kruga koordinate završne točke mijenjaju se u $(-3k, k)$ pa Esma očito ne može doći u početnu točku jer se završne točke nalaze na jednom pravcu.

Ljerkino kretanje izgleda ovako:

Prvi krug: $(0, 0), (0, 2), (-4, 2), (-4, -1), (1, -1), (1, 0)$

Drugi krug: $(1, 0), (-1, 0), (-1, -4), (2, -4), (2, 1), (1, 1)$

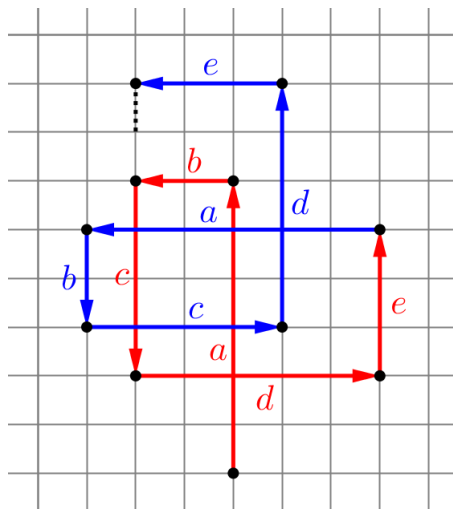
Treći krug: $(1, 1), (1, -1), (5, -1), (5, 2), (0, 2), (0, 1)$

Četvrti krug: $(0, 1), (2, 1), (2, 5), (-1, 5), (-1, 0), (0, 0)$

Ljerki je bilo potrebno 4 kruga da se vrati u točku iz koje je krenula.

Neka je kôd imena sa 5 slova $abcde$, gdje su $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Krećemo iz točke (x, y) prema gore za a , lijevo za b , dolje za c , desno za d i opet gore za e i dolazimo u točku $(x - b + d, y + a - c + e)$.

U drugom krugu krećemo iz te točke prema lijevo za a , dolje za b , desno za c , gore za d , lijevo za e i dolazimo u točku $(x - b + d - a + c - e, y + a - c + e - b + d)$.



U trećem krugu krećemo iz te točke prema dolje za a , desno za b , gore za c , lijevo za d i opet dolje za e i dolazimo u točku $(x - b + d - a + c - e + b - d, y + a - c + e - b + d - a + c - e) = (x - a + c - e, y - b + d)$.

U četvrtom krugu krećemo iz te točke prema desno za a , gore za b , lijevo za c , dolje za d , desno za e i dolazimo u točku $(x - a + c - e + a - c + e, y - b + d + b - d) = (x, y)$.

Osobi s 5 slova u imenu potrebna su 4 kruga da se vrati u početnu točku.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-2.1.

Riješite sustav jednažbi

$$\begin{aligned}x + y - z &= 2 \\x^2 + y^2 - z^2 &= -4 \\x^3 + y^3 - z^3 &= 20.\end{aligned}$$

Rješenje.

Prvu jednažbu sustava možemo pisati u obliku $x + y = z + 2$. Kvadriramo njem dobijemo $x^2 + y^2 + 2xy = z^2 + 4z + 4$, a oduzmemo li od toga drugu dane jednažbu dobivamo $2xy = 4z + 8$, odnosno $xy = 2z + 4$.

Zbroj kubova $x^3 + y^3$ u trećoj jednažbi sustava zapišimo u pogodnijem obliku $(x + y)^3 - 3xy(x + y) - z^3 = 20$ i uvrstimo $x + y = z + 2$ i $xy = 2z + 4$.

Dobivamo jednažbu s jednom nepoznanicom $(z + 2)^3 - 3(2z + 4)(z + 2) - z^3 = 20$ kojoj je rješenje $z = -3$.

Preostaje riješiti sustav

$$x + y = -1 \quad xy = -2.$$

Rješenja ovog simetričnog sustava dobivamo rješavanjem kvadratne jednažbe $t^2 + t - 2 = 0$, a to su $(1, -2)$ i $(-2, 1)$. Prema tome rješenja (x, y, z) danog sustava su $(1, -2, -3)$ i $(-2, 1, -3)$.

Zadatak B-2.2.

Koliko ima cijelih brojeva x za koje je vrijednost izraza

$$\frac{(x - 1^2)(x - 3^2) \dots (x - (2k - 1)^2) \dots (x - 2019^2)}{(x - 2^2)(x - 4^2) \dots (x - (2k)^2) \dots (x - 2020^2)}$$

negativna?

Rješenje.

Predznak funkcije se mijenja u nultočkama brojnika i nazivnika kao što je prikazano na slici.



Koristeći ovaj prikaz (ili tablice predznaka) zaključujemo da je vrijednost funkcije f pozitivna za sve $x < 1$ i $x > 2020^2$, a na intervalima određenim nultočkama brojnika i nazivnika $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 2019^2, 2020^2$ predznak će biti negativan na intervalima

$$\langle 1^2, 2^2 \rangle, \langle 3^2, 4^2 \rangle, \dots, \langle (2k-1)^2, (2k)^2 \rangle, \dots, \langle 2019^2, 2020^2 \rangle.$$

Broj cijelih brojeva koji su unutar tih intervala je

$$\begin{aligned} & (2^2 - 1^2 - 1) + (4^2 - 3^2 - 1) + \dots + ((2k)^2 - (2k-1)^2 - 1) + \dots + (2020^2 - 2019^2 - 1) \\ &= (2^2 - 1^2) + (4^2 - 3^2) + \dots + ((2k)^2 - (2k-1)^2) + \dots + (2020^2 - 2019^2) - 1010 \\ &= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \dots + \\ & \quad ((2k)-(2k-1))((2k)+(2k-1)) + \dots + (2020-2019)(2020+2019) - 1010 \\ &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 2020 - 1010 = \frac{2020 \cdot (1 + 2020)}{2} - 1010 = 2040200. \end{aligned}$$

Zadatak B-2.3.

Odredite dva pozitivna broja, djeljiva sa četiri, tako da razlika njihovih kubova bude četveroznamenasti broj djeljiv sa 91.

Rješenje.

Neka su traženi brojevi x i y , $x > y$. Budući da su djeljivi sa 4, vrijedi $x = 4a$, $y = 4b$, za neke prirodne brojeve a i b , $a > b$.

Prema uvjetu zadatka, vrijedi

$$(4a)^3 - (4b)^3 = 64(a^3 - b^3) = 64 \cdot 91k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Kako broj mora biti četveroznamenasti, a $64 \cdot 91 = 5824$ slijedi $k = 1$.

Tada je $a^3 - b^3 = 91$ odnosno $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 7 \cdot 13$.

Vrijedi $a^2 + ab + b^2 = (a-b)^2 + 3ab > (a-b)^2 > a-b$ za $a-b > 1$. Dakle faktor $a-b$ mora biti manji od faktora $a^2 + ab + b^2$ pa je dovoljno riješiti ove sustave jednačbi:

$$(1) \quad a-b=1, \quad a^2+ab+b^2=91;$$

$$(2) \quad a-b=7, \quad a^2+ab+b^2=13.$$

Rješavanjem sustava (1) dobivamo jednačbu $b^2 + b - 30 = 0$ kojoj je pozitivno rješenje $b = 5$. Tada je $a = 6$.

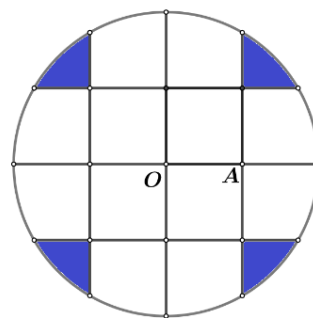
Rješavanjem sustava (2) dobivamo jednačbu $b^2 + 7b + 12 = 0$ koja nema pozitivnih rješenja.

Dakle, traženi brojevi su $x = 4 \cdot 6 = 24$ i $y = 4 \cdot 5 = 20$.

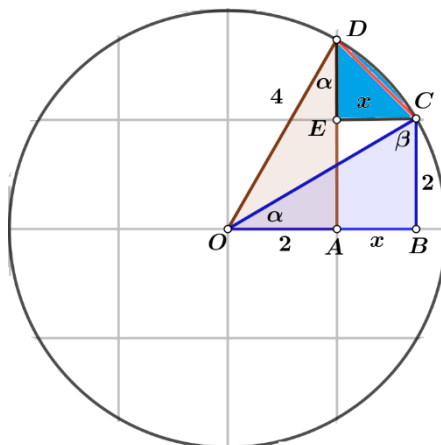
Zadatok B-2.4.

Iz kvadratne mreže izrezan je krug sa središtem u točki O polumjera 4 cm prikazan na slici.

Ako je $|OA| = 2$ cm, izračunajte ukupnu površinu osjenčanih dijelova kruga.



Rješenje.



Površinu jednog osjenčanog dijela računamo tako da od površine kružnog isječka OCD oduzmemo površinu trokuta OCD i pridodamo površinu trokuta ECD .

Pravokutni trokuti OAD i CBO su sukladni (SSK) i vrijedi:

$$\sin \alpha = \frac{2}{4} = 0.5, \quad \alpha = 30^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \sphericalangle COD = \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOC = \beta - \alpha = 30^\circ.$$

Prema Pitagorinom poučku je $(2+x)^2 + 2^2 = 4^2$, odnosno $x = 2\sqrt{3} - 2$.

Površina kružnog isječka OCD jednaka je $P_i = \frac{r^2\pi}{12} = \frac{4\pi}{3}$ cm.

Površina trokuta OCD jednaka je $P_{OCD} = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \sin 30^\circ = 4 \text{ cm.}$

Površina trokuta ECD jednaka je $P_{ECD} = \frac{1}{2} x^2 = \frac{(2\sqrt{3}-2)^2}{2} = (8 - 4\sqrt{3})\text{cm}$.

Tražena površina jednaka je

$$P = 4(P_i - P_{OCD} + P_{ECD}) = 4\left(\frac{4\pi}{3} - 4 + 8 - 4\sqrt{3}\right) = \left(\frac{16\pi}{3} + 16 - 16\sqrt{3}\right) \text{ cm.}$$

Napomena: Površina trokuta OCD se može izračunati i bez formule $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$:

$$P = \frac{|CD| \cdot v_{|CD|}}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \sqrt{4^2 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{(2\sqrt{3}-2)\sqrt{2}}{2} \sqrt{16 - \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-2)^2}$$

$$= (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2(8+4\sqrt{3})} = \sqrt{(8-4\sqrt{3})(8+4\sqrt{3})} = 4.$$

Zadatak B-2.5.

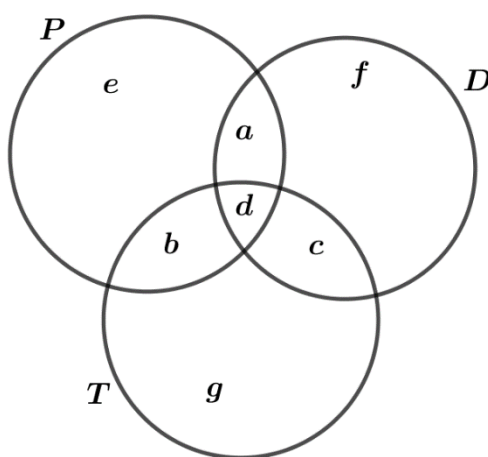
Test iz matematike sastojao se od tri zadatka. Profesor Maks priopćio je učenicima rezultate testa pomalo neodređeno, postavljajući novi zadatak:

Prvi i drugi zadatak točno je riješilo 7 učenika, drugi i treći zadatak 9 učenika, a prvi i treći zadatak točno je riješilo čak 13 učenika. Koliko je najmanje učenika točno riješilo sva tri zadatka?

Poznato je da su u razredu 24 učenika i da nema učenika koji nije riješio niti jedan zadatak.

Rješenje.

Broj učenika koji su riješili samo prvi i drugi zadatak označimo s a , samo prvi i treći s b , samo drugi i treći s c . Neka je d broj učenika koji su točno riješili sva tri zadatka, e broj onih koji su točno riješili samo prvi zadatak, f samo drugi i g samo treći.



Tada je $a + d = 7$, $b + d = 13$, $c + d = 9$, $a + b + c + d + e + f + g = 24$.

Zbrojimo prve tri jednakosti: $a + b + c + 3d = 29$. Kako je $a + b + c + d + e + f + g = 24$, slijedi $a + b + c + 3d + e + f + g = 24 + 2d$, $29 + e + f + g = 24 + 2d$, $e + f + g + 5 = 2d$.

Prema uvjetu zadatka $e + f + g$ je najmanje 3, pa je $2d$ najmanje 8. Zato je $d \geq 4$, odnosno najmanje je četvero učenika točno riješilo sva tri zadatka.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-3.1.

Riješite jednadžbu

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

Prvo rješenje.

Ova će jednadžba imati realna rješenja ako je diskriminanta (kvadratne jednadžbe po x) veća ili jednaka 0, odnosno

$$4 \sin^2(xy) - 4 \geq 0.$$

S obzirom da je $\sin^2(xy) \leq 1$, gornja je nejednakost moguća samo ako je $\sin^2(xy) = 1$.

Tada je $\sin(xy) = \pm 1$, odnosno $xy = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Iz $\sin(xy) = 1$ i početne jednadžbe slijedi $x^2 + 2x + 1 = 0$, pa je $x = -1$, a $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Analogno, za $\sin(xy) = -1$ dobivamo $x = 1$, a $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dakle, rješenja (x, y) dane jednadžbe su $(1, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ i $(-1, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Drugo rješenje.

Iz dae jednadžbe slijedi $\sin(xy) = \frac{-1-x^2}{2x}$, pa zbog $|\sin(xy)| \leq 1$ vrijedi $\left| \frac{-1-x^2}{2x} \right| \leq 1$, te dalje redom

$$|1+x^2| \leq |2x| \quad 1-|2x|+x^2 \leq 0 \quad (1-|x|)^2 \leq 0.$$

Posljednja nejednakost vrijedi samo ako je $|x| = 1$ tj. $x = \pm 1$.

Za $x = 1$ je $\sin y = -1$ pa je $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

a za $x = -1$ iz $\sin y = 1$ slijedi $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Treće rješenje.

Dana jednadžba je redom ekvivalentna s

$$\begin{aligned} x^2 + 2x \sin(xy) + \sin^2(xy) &= \sin^2(xy) - 1 \\ (x + \sin(xy))^2 &= -\cos^2(xy) \end{aligned}$$

Ovo je moguće samo ako je $x + \sin(xy) = \cos(xy) = 0$.

Iz $\cos(xy) = 0$ slijedi $xy = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ili $xy = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

U prvom slučaju je $\sin(xy) = 1$, $x = -1$, $y = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

a u drugom $\sin(xy) = -1$, $x = 1$, $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Zadatak B-3.2.

Koliko nejednadžba

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{100} \leq 103$$

ima rješenja za koja su x_1, x_2, \dots, x_{100} prirodni brojevi?

Rješenje.

Budući da su x_i prirodni brojevi, svaki x_i mora imati vrijednost barem 1. To znači da treba odrediti na koliko načina zbroj prirodnih brojeva $x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ može biti jednak 100, 101, 102 i 103.

Zbroj 100 može se dobiti samo na 1 način, kad su svi pribrojnici $x_i = 1$.

Zbroj 101 dobijemo ako je jedan od pribrojnika jednak 2, a ostalih 99 je jednako 1. Taj pribrojnici možemo izabrati na 100 načina.

Zbroj 102 dobijemo u ovim slučajevima:

- jedan pribrojnici jednak je 3, a ostalih 99 je 1 – za to postoji 100 načina
- dva pribrojnika jednaka su 2, a ostalih 98 je 1 – za to postoji $\binom{100}{2} = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 99$ načina.

Zbroj 103 se može dobiti ako je:

- jedan pribrojnici jednak 4, a ostalih 99 je 1, što je moguće na 100 načina
- jedan pribrojnici jednak 3, jedan pribrojnici je 2, ostalih 98 je 1, što je moguće na $100 \cdot 99$ načina
- tri pribrojnika jednaka 2, ostalih 97 je 1, što je moguće na $\frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1}$ načina.

Dakle, ukupno je

$$1 + 100 + 100 + \frac{100 \cdot 99}{2} + 100 + 100 \cdot 99 + \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 176851$$

rješenja dane nejednadžbe.

Zadatak B-3.3.

Odredite koliko parova prirodnih brojeva (x, y) zadovoljava jednadžbu

$$\log_2 \left(\log_{2^x} \left(\log_{2^y} 2^{10^{2020}} \right) \right) = 0.$$

Koji je najveći umnožak xy među svim takvim parovima?

Rješenje.

Dana je jednadžba ekvivalentna s $\log_{2^x} \left(\log_{2^y} 2^{10^{2020}} \right) = 1$, odnosno $\log_{2^x} \left(\log \frac{10^{2020}}{y} \right) = 1$.

Slijedi $\frac{10^{2020}}{y} = 2^x$ pa je

$$y = \frac{10^{2020}}{2^x} = \frac{2^{2020} \cdot 5^{2020}}{2^x} = 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}.$$

Budući da su x i y prirodni brojevi, vrijedi $2020 - x > 0$ pa je $x < 2020$, odnosno $x \in \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$. Dakle, ima 2020 traženih uređenih parova

$$(x, y) = (x, 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}).$$

Umnožak $xy = x \cdot 2^{2020-x} \cdot 5^{2020}$ je najveći kad je umnožak $x \cdot 2^{-x}$ najveći.

Promotrimo razliku umnožaka $x \cdot 2^{-x}$ i $(x+1) \cdot 2^{-(x+1)}$.

$$x \cdot 2^{-x} - (x+1) \cdot 2^{-(x+1)} = 2^{-x-1}(2x - x - 1) = 2^{-x-1}(x-1).$$

Očito je ova razlika pozitivna za sve $x \geq 1$, što znači da se vrijednost umnoška $x \cdot 2^{-x}$ smanjuje s povećanjem broja x , pa je njegova vrijednost najveća za $x = 1$.

Dakle, najveća vrijednost umnoška je $2^{2019} \cdot 5^{2020} = \frac{10^{2020}}{2}$.

Zadatak B-3.4.

U kvadrat $ABCD$ upisana je kružnica k . Iz točke T koja pripada kružnici k dijagonala \overline{AC} vidi se pod kutom α , a dijagonala \overline{BD} pod kutom β .

Dokažite da je $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = 8$.

Prvo rješenje.

Neka je polumjer kružnice k jednak r , a njezino središte ishodište koordinatnog sustava O . Koordinate vrhova kvadrata su $A(-r, -r)$, $B(r, -r)$, $C(r, r)$, $D(-r, r)$, a koordinate točke T su (x, y) .

Točka T je od središta udaljena za r , odnosno vrijedi $\sqrt{x^2 + y^2} = r$, pa je $x^2 + y^2 = r^2$. Kut α je kut između pravaca AT i CT , a kut β kut između pravaca BT i DT . Stoga je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{k_{DT} - k_{BT}}{1 + k_{DT}k_{BT}}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{k_{CT} - k_{AT}}{1 + k_{CT}k_{AT}} = \frac{\frac{r-y}{r-x} - \frac{-r-y}{-r-x}}{1 + \frac{r-y}{r-x} \cdot \frac{-r-y}{-r-x}} \\ &= \frac{r - yr + x - r + yr - x}{r - xr + x + r - yr + y} = \frac{2rx - 2ry}{2r^2 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

Kako je $x^2 + y^2 = r^2$, slijedi $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2(x-y)}{r}$.

Analogno je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \frac{\frac{r-y}{-r-x} - \frac{-r-y}{r-x}}{1 + \frac{r-y}{-r-x} \cdot \frac{-r-y}{r-x}} \\ &= \frac{r - yr - x - r + yr + x}{-r - xr - x + r - y - r - y} = \frac{-2rx - 2ry}{-r^2} = \frac{2(x+y)}{r}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{4(x-y)^2}{r^2} + \frac{4(x+y)^2}{r^2} = \frac{4}{r^2}(x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2) \\ &= \frac{8}{r^2}(x^2 + y^2) = \frac{8}{r^2} \cdot r^2 = 8. \end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Neka je polumjer kružnice k jednak r , a njezino središte ishodište koordinatnog sustava O . Koordinate vrhova kvadrata su $A(-r, -r)$, $B(r, -r)$, $C(r, r)$, $D(-r, r)$, a koordinate točke T su (x, y) . Time su određeni vektori

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TA} &= (-r-x)\vec{i} + (-r-y)\vec{j}, & \overrightarrow{TC} &= (r-x)\vec{i} + (r-y)\vec{j}, \\ \overrightarrow{TB} &= (r-x)\vec{i} + (-r-y)\vec{j}, & \overrightarrow{TD} &= (-r-x)\vec{i} + (r-y)\vec{j}, \\ \overrightarrow{OT} &= x\vec{i} + y\vec{j}, & |\overrightarrow{OT}|^2 &= x^2 + y^2 = r^2.\end{aligned}$$

Tada je kosinus kuta α jednak

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\overrightarrow{TA} \cdot \overrightarrow{TC}}{|\overrightarrow{TA}| \cdot |\overrightarrow{TC}|} = \frac{(r-x)(-r-x) + (-r-y)(r-y)}{\sqrt{(-r-x)^2 + (-r-y)^2} \cdot \sqrt{(r-x)^2 + (r-y)^2}} \\ &= \frac{-2r^2 + x^2 + y^2}{\sqrt{3r^2 + 2r(x+y)} \cdot \sqrt{3r^2 - 2r(x+y)}} = \frac{-r^2}{\sqrt{9r^4 - 4r^2(x+y)^2}} = \frac{-r}{\sqrt{9r^2 - 4(x+y)^2}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\overrightarrow{TB} \cdot \overrightarrow{TD}}{|\overrightarrow{TB}| \cdot |\overrightarrow{TD}|} = \frac{(-r-x)(r-x) + (r-y)(r-y)}{\sqrt{(r-x)^2 + (-r-y)^2} \cdot \sqrt{(-r-x)^2 + (r-y)^2}} \\ &= \frac{-2r^2 + x^2 + y^2}{\sqrt{3r^2 - 2r(x-y)} \cdot \sqrt{3r^2 + 2r(x-y)}} = \frac{-r^2}{\sqrt{9r^4 - 4r^2(x-y)^2}} = \frac{-r}{\sqrt{9r^2 - 4(x-y)^2}}.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{9r^2 - 4(x+y)^2}{r^2} - 1 = \frac{4r^2 - 8xy}{r^2}, \\ \operatorname{tg}^2 \beta &= \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 = \frac{9r^2 - 4(x-y)^2}{r^2} - 1 = \frac{4r^2 + 8xy}{r^2},\end{aligned}$$

te konačno

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{4r^2 - 8xy}{r^2} + \frac{4r^2 + 8xy}{r^2} = 8.$$

Zadatak B-3.5.

Izračunajte obujam pravilne četverostrane prizme $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ako je $|AB| = a$ i $\sphericalangle C_1 A B + \sphericalangle C_1 A C = 135^\circ$.

Prvo rješenje.

Neka je $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle C_1AC = \beta$, a visina prizme v . Dakle, vrijedi $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC je $\cos \beta = \frac{a\sqrt{2}}{|AC_1|}$,

a iz pravokutnog trokuta C_1AB je $\cos \alpha = \frac{a}{|AC_1|}$.

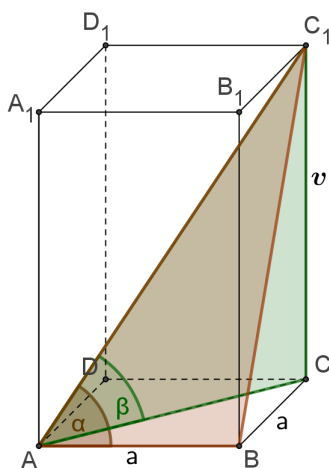
Dakle vrijedi $\frac{a\sqrt{2}}{\cos \beta} = \frac{a}{\cos \alpha}$ odnosno $\cos \beta = \sqrt{2} \sin \alpha$ pa dobivamo

$$\cos \beta = \sqrt{2} \cos(135^\circ - \beta) = \sqrt{2}(\cos 135^\circ \cos \beta + \sin 135^\circ \sin \beta) = -\cos \beta + \sin \beta.$$

Iz $\cos \beta = -\cos \beta + \sin \beta$ slijedi $\operatorname{tg} \beta = 2$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC imamo $\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{a\sqrt{2}}$ pa je $v = \operatorname{tg} \beta \cdot a\sqrt{2} = 2a\sqrt{2}$.

Dakle, obujam prizme je $V = B \cdot v = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

**Drugo rješenje.**

Neka je $\sphericalangle C_1AB = \alpha$, $\sphericalangle C_1AC = \beta$, a visina prizme v . Dakle, vrijedi $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Iz pravokutnog trokuta C_1AC imamo $\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{a\sqrt{2}}$,

a iz pravokutnog trokuta C_1AB je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$.

Kako je $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$ vrijedi $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - 1$.

Kako je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a}$ i $\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{a\sqrt{2}}$ iz prethodne jednakosti dobivamo

$$\frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a} + \frac{v}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{v^2 + a^2}}{a} \cdot \frac{v}{a\sqrt{2}} - 1.$$

Iz ove jednakost slijedi $v = 2a\sqrt{2}$.

Stoga je obujam prizme $V = B \cdot v = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2a^3\sqrt{2}$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

26. listopada 2020.

Zadatak B-4.1.

Riješite jednadžbu

$$\log_{2020} \sqrt{x} + \log_{2020} \sqrt[4]{x} + \log_{2020} \sqrt[8]{x} + \dots + \log_{2020} \sqrt[2^n]{x} + \dots = \frac{2}{\log_2 x} + \log_x 505.$$

Rješenje.

Rješenje jednadžbe mora zadovoljavati uvjete: $x > 0$, $x \neq 1$.

Lijeva strana jednadžbe je

$$\begin{aligned} & \log_{2020} \sqrt{x} + \log_{2020} \sqrt[4]{x} + \log_{2020} \sqrt[8]{x} + \dots + \log_{2020} \sqrt[2^n]{x} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \log_{2020} x + \frac{1}{4} \log_{2020} x + \frac{1}{8} \log_{2020} x + \dots + \frac{1}{2^n} \log_{2020} x + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) \log_{2020} x \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ geometrijski red s prvim članom $a_1 = \frac{1}{2}$ i kvocijentom $q = \frac{1}{2}$, njegova suma je $\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ pa je lijeva strana dane jednadžbe jednaka $\log_{2020} x$.

Desna strana jednadžbe je $\frac{2}{\log_2 x} + \log_x 505 = 2 \log_x 2 + \log_x 505 = \log_x 2020$.

Dakle, zadana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi $\log_{2020} x = \log x 2020$. Slijedi

$$\log_{2020} x = \frac{1}{\log_{2020} x},$$

odnosno $(\log_{2020} x)^2 = 1$, tj. $\log_{2020} x = 1$ ili $\log_{2020} x = -1$. Rješenja su $x = 2020$ i $x = \frac{1}{2020}$.

Zadatak B-4.2.

U kompleksnoj ravnini nalazi se jednakokranični trokut ABC . Kompleksan broj $z = \sqrt{3} + 4i$ pridružen je vrhu C , a kompleksan broj $z = i$ središtu S tom trokutu opisane kružnice. Odredite kompleksne brojeve pridružene vrhovima A i B .

Rješenje.

Koordinate točke C su $(\sqrt{3}, 4)$, a točke $S(0, 1)$. Polumjer trokutu opisane kružnice jednak je

$$R = \sqrt{((0 - \sqrt{3})^2 + (1 - 4)^2)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

Tada duljinu stranice danog trokuta računamo iz $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ i ona iznosi $a = \frac{3R}{\sqrt{3}} = 6$.

Kako se vrhovi A i B nalaze na kružnici opisanoj trokutu ABC , njihove koordinate zadovoljavaju jednažbu $x^2 + (y - 1)^2 = 12$.

Također, iz $|AC| = 6$ slijedi $(x - \sqrt{3})^2 + (y - 4)^2 = 36$.

Oduzimanjem ovih dviju jednažbi i sređivanjem dobivamo $y = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}x$. Uvrštavanjem u prvu jednažbu dobivamo kvadratnu jednažbu $x^2 + \sqrt{3}x - 6 = 0$ kojoj su rješenja $x_1 = -2\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$. Tada je $y_1 = 1$ i $y_2 = -2$. Dakle, vrhu A pridružen je kompleksan broj $2\sqrt{3} + i$, a vrhu B kompleksan broj $\sqrt{3} - 2i$.

Zadatak B-4.3.

Neka je $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle -1, 1 \rangle$,

$$f(x) = \frac{100^{-x} - 100^x}{100^{-x} + 100^x}.$$

Odredite $f^{-1}(x) - f^{-1}(1 + 2x)$.

Rješenje.

Odredimo inverznu funkciju funkcije f . Zapišimo funkciju f na sljedeći način:

$$y = f(x) = \frac{100^{-x} - 100^x}{100^{-x} + 100^x} \cdot \frac{100^x}{100^x} = \frac{1 - 100^{2x}}{1 + 100^{2x}}.$$

Nadalje vrijedi

$$y + y \cdot 100^{2x} = 1 - 100^{2x}$$

odnosno $100^{2x}(y + 1) = 1 - y$, pa je $100^{2x} = \frac{1 - y}{1 + y}$.

Odatle je $x = \frac{1}{2} \log_{100} \frac{1 - y}{1 + y} = \frac{1}{4} \log \frac{1 - y}{1 + y}$.

Slijedi

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{4} \log \frac{1 - x}{1 + x},$$

pa je

$$f^{-1}(1 + 2x) = \frac{1}{4} \log \frac{1 - (1 + 2x)}{1 + (1 + 2x)} = \frac{1}{4} \log \frac{-2x}{2 + 2x} = \frac{1}{4} \log \frac{-x}{1 + x}.$$

Konačno

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) - f^{-1}(1 + 2x) &= \frac{1}{4} \log \frac{1 - x}{1 + x} - \frac{1}{4} \log \frac{-x}{1 + x} = \frac{1}{4} \left(\log \frac{1 - x}{1 + x} - \log \frac{-x}{1 + x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \log \left(\frac{1 - x}{1 + x} : \frac{-x}{1 + x} \right) = \frac{1}{4} \log \frac{1 - x}{-x} = \frac{1}{4} \log \frac{x - 1}{x}. \end{aligned}$$

Zadatak B-4.4.

Niz realnih brojeva (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{3}{5}, \quad a_n = \frac{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}{2a_{n-2} - a_{n-1}} \quad \text{za } n \geq 3.$$

Odredite a_{2020} .

Prvo rješenje.

Članovi niza (a_n) su $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \dots$, a niz njihovih recipročnih vrijednosti $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{3}, \dots$

Pokazat ćemo da je niz $(\frac{1}{a_n})$ aritmetički niz. Opći član niza recipročnih vrijednosti je

$$\frac{1}{a_n} = \frac{2a_{n-2} - a_{n-1}}{a_{n-2}a_{n-1}} = \frac{2}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}}.$$

Slijedi

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_n} \right) = \frac{1}{a_{n-1}},$$

pa je svaki član niza $(\frac{1}{a_n})$, počevši od drugog člana, aritmetička sredina susjednih članova.

Prvi član tog niza jednak je 1, a razlika $d = \frac{2}{3}$. Tada je $\frac{1}{a_{2020}} = 1 + 2019 \cdot \frac{2}{3} = 1347$, a traženi član $a_{2020} = \frac{1}{1347}$.

Drugo rješenje.

Članovi niza (a_n) su $1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{9}, \dots$

Dokažimo matematičkom indukcijom da je opći član ovog niza $a_n = \frac{3}{2n+1}$.

Baza indukcije. Provjerimo tvrdnju za $n = 1$ i $n = 2$.

$a_1 = \frac{3}{2+1} = 1$, $a_2 = \frac{3}{4+1} = \frac{3}{5}$, što je točno jer su to zadane vrijednosti.

Korak indukcije.

Pretpostavimo da je $a_{n-1} = \frac{3}{2n-1}$ i $a_n = \frac{3}{2n+1}$ za neki prirodni broj $n > 2$. Tada je

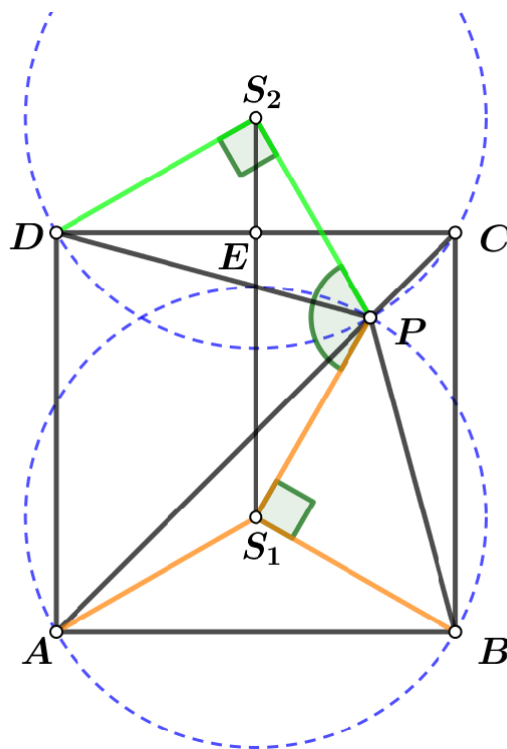
$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1} \cdot a_n}{2a_{n-1} - a_n} = (\text{pretp.}) = \frac{\frac{3}{2n-1} \cdot \frac{3}{2n+1}}{2 \cdot \frac{3}{2n-1} - \frac{3}{2n+1}} = \frac{9}{6n+9} = \frac{3}{2n+3} = \frac{3}{2(n+1)+1}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n , pa je $a_{2020} = \frac{3}{4041} = \frac{1}{1347}$.

Zadatak B-4.5.

Duljina stranice kvadrata $ABCD$ iznosi 24 cm. Točka P je na dijagonali \overline{AC} i vrijedi $|AP| > |PC|$. Točka S_1 je središte kružnice opisane trokutu APB , a točka S_2 središte kružnice opisane trokutu PCD . Ako je $|\angle S_1PS_2| = 120^\circ$, odredite $|AP|$.

Rješenje.



Trokuti ABP i ADP su sukladni prema poučku SKS ($|AB| = |AD|$, \overline{AP} je zajednička stranica, a kut $\sphericalangle BAP$ je sukladan kutu $\sphericalangle DAP$). Stoga je $|BP| = |DP|$. Vrijedi $\sphericalangle PAB = 45^\circ$ i to je obodni kut nad tetivom \overline{PB} , a kut $\sphericalangle PCD = 45^\circ$ je obodni nad \overline{PD} . Stoga su pripadni središnji kutovi sukladni, $\sphericalangle BS_1P = \sphericalangle DS_2P = 90^\circ$. Slijedi $\triangle BS_1P \cong \triangle DS_2P$ i $|S_1P| = |S_2P|$.

Tada je trokut S_1PS_2 jednakokrakan, a kako je trokut DES_2 pravokutan (pravac S_1S_2 je simetrala dužina \overline{CD} i \overline{AB}), redom vrijedi:

$$\begin{aligned} \sphericalangle PS_2S_1 &= 30^\circ, & \sphericalangle ES_2D &= 90^\circ - \sphericalangle PS_2S_1 = 60^\circ, & \sphericalangle S_2DE &= 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \\ \sphericalangle CDP &= 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, & \sphericalangle PDA &= 75^\circ, & \sphericalangle DPA &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Primijenimo poučak o sinusima na trokut PDA :

$$\frac{|PA|}{\sin 75^\circ} = \frac{24}{\sin 60^\circ}.$$

Tada je tražena duljina

$$|PA| = \frac{24 \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot (\sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ) = 4\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1).$$